トポロジーと幾何学入門

Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry

I.M.シンガー／J.A.ソープ＝共著

赤 攝也＝監訳　松江広文／一楽重雄＝共訳

培風館



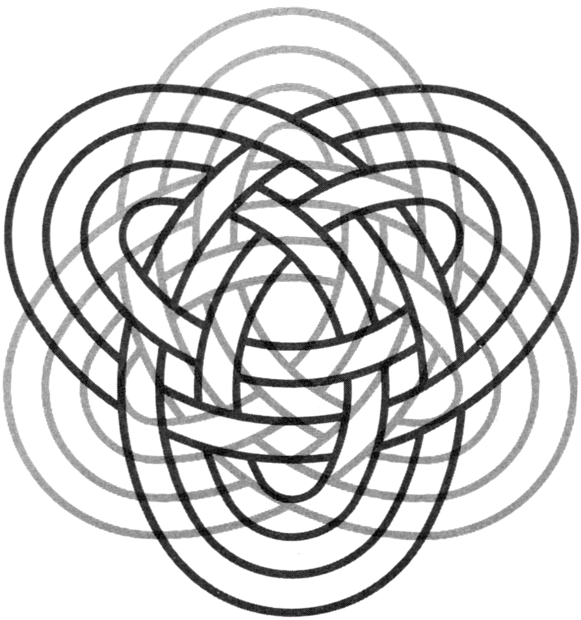
トポロジーと幾何学入門

Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry

I.M.シンガー／J.A.ソープ＝共著

赤 攝也＝監訳　　松江広文／一楽重雄＝共訳

培風館



LECTURE NOTES ON ELEMENTARY TOPOLOGY AND GEOMETRY

by
I. M. Singer
John A. Thorpe

監訳者序文

本書は，原著者の「はしがき」ならびに両訳者の「あとがき」からもわかるように，きわめてユニークな本である．

トポロジーと幾何学とから選ばれたいくつかの重要なトピックを系統だててまとめ，読者に「数学らしさ」というものを何とかして伝えようと試みる．その試みは見事に成功していると思う．

ところで，原著は，きわめて典型的な「数学の語法」で書かれている．欧米，日本を問わず，数学の現場にはそのような「数学の語法」というものがある．数学に慣れるのには，是非ともこれに慣れなければならない．両訳者は，よくアメリカでの語法を日本での語法に移しかえた．

そこで，監訳の作業を進めるにあたっては，両訳者の訳文を極力尊重するという方針をとった．ただ，読者がこの語法により自然になじめるようにするため，いささかの工夫をした．とはいっても，両訳者の力量のおかげで，あまり苦労はいらなかった．

本書が，できるだけ多くの人々のお役に立つことを願ってやまない．

1976年9月

赤　摂　也

原著者はしがき

現在では，数学専攻の学部学生にとって，数学は非常に細分化されたものと映っている．微分積分学のあとで解析学と代数学の講義を受ける．そして，学生の関心(あるいは専門分野)に従って特定の題目の講義を受ける．トポロジーであれば，それは通常平易な位相空間論であり，幾何学であれば，それは通常古典的な微分幾何学である．学部の段階では，数学にはある統一性が存在するとか，いろいろな分野が重なり合っているとか，ある分野の手法が他の分野へも応用されるとかいったような，わくわくするような発見はないことになっている．おそらく，まだ十分な知識がないためであろう．したがって，このような相互の関連を理解するには，大学院で研究生活を始めてしばらく経つまで待たなければならない．

本書は，この細分化を，少なくともトポロジーと幾何学において打ち破ろうとする1つの試みである．代数と微積分で学んだことが，幾何学，トポロジー，群論に関係したかなり深い結果を証明するのに用いられる(ド・ラムの定理，曲面に対するガウス・ボンネの定理，基本群の被覆空間に対する関手関係，等質空間としての定曲率曲面が最も注目すべき例である)．

最初の2章では，初等的な位相空間論の重要な本質的部分だけを述べ，関数解析への応用を示唆しておいた．第3,4章では，基本群，被覆空間，単体的複体を扱う．これらの章では，E. Spanier によった．第5章で多様体の理論に関して準備をしたあと，H. Whitney の *Geometric Integration Theory* にならって，ド・ラムの定理(第6章)が証明される．最後の2章ではリーマン幾何学を扱ったが，ここでは E. Cartan と S. S. Chern の方法によった(リー群論を避けるために，最後の2章では向きづけ可能な2次元多様体のみを扱った)．

この講義ノートは，M.I.T. での「トポロジーおよび幾何学」と題する1年間の講義に使われたものであり，その講義では，少なくとも半年の現代代数学の講義と半年の「正しく行なわれた」微分積分学の講義とをすでに聴いていることを前提とした．このクラスは約70人からなり，大部分4年生であった．このような講義の構想は，著者の1人がアメリカ数学協会の学部数学プログラム委員会(CUPM)のための仕事をしていた間に得られた．この線に沿っての，

しかしさらに望みの高いプログラムが，CUPM の小冊子「数学研究者のための学部での準備」(1963) に示されている (その 68 ページから 70 ページにかけての「曲面論に関するアウトライン I, II」を参照されたい)．しかし，大きなクラスでテキストなしに講義するのであれば，このノートの内容がちょうど 1 年間で行なえるぎりぎりの量であると思う．

I. M. シンガー
J. A. ソープ

目　　次

1章　位相空間論

1.1　集 合 論

ものの**集合**(集まり，族)という概念と，あるものがある集合に“属する”という概念は，前提として(定義せずに)受け入れることにしよう．

ただ次のことに注意する．集合 S と，もの x が与えられたとき，x が集合 S に属する(このとき x を S の元といい，$x \in S$ と書く)か，あるいは，x が S に属さない($x \notin S$ と書く)か，どちらかである．

定義　A と B を集合とする．A が B の**部分集合**であるとは，$x \in A$ なら $x \in B$ であることをいい，$A \subset B$ と書く．A が B に**等しい**とは，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ であることをいい，$A=B$ と書く．

記号　**空集合**，すなわち元をまったくもたない集合を ϕ で表わす．

注意

(1)　すべての集合 A に対して $\phi \subset A$ である．

(2)　空集合 ϕ はただ1つである．すなわち任意の2つの空集合は等しい．なぜなら，ϕ_1 と ϕ_2 を2つの空集合とすると，$\phi_1 \subset \phi_2$ かつ $\phi_2 \subset \phi_1$ である．

(3)　すべての集合 A に対して $A \subset A$ である．

定義　A と B を集合とする．A と B の**和集合** $A \cup B$ とは，$x \in A$ または $x \in B$ であるすべての x からなる集合のことである．このことを次のように書く．

$$A \cup B=[x;\ x \in A \text{ または } x \in B].$$

A と B の**共通部分** $A \cap B$ は

$$A \cap B=[x;\ x \in A \text{ かつ } x \in B]$$

によって定義される．同様に S を集合の集合(集まり)としたとき，S に含まれるすべての集合の和集合と共通部分が，それぞれ次のように定義される．

$$\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S=[x;\ ある\ S\in\mathcal{S}\ に対して\ x\in S]$$

$$\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S=[x;\ すべての\ S\in\mathcal{S}\ に対して\ x\in S]$$

$A\subset B$ のとき，A の B での**補集合** A' あるいは $B-A$ は，

$$A'=[x\in B;\ x\notin A].$$

で定義される．

定理 1 A, B, C および S を集合とする．このとき，次のことが成り立つ．

(1) $A\cup B=B\cup A$,

(2) $A\cap B=B\cap A$,

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

(4) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$,

(5) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

(6) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

(7) $A\subset S$, $B\subset S$ のとき，$(A\cup B)'=A'\cap B'$,

(8) $A\subset S$, $B\subset S$ のとき，$(A\cap B)'=A'\cup B'$,

(9) $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ をそれぞれ集合の集合(集まり)とすると

$$\Big(\bigcup_{S\in\mathcal{S}_1} S\Big)\cup\Big(\bigcup_{S\in\mathcal{S}_2} S\Big)=\bigcup_{S\in\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} S$$

$$\Big(\bigcap_{S\in\mathcal{S}_1} S\Big)\cap\Big(\bigcap_{S\in\mathcal{S}_2} S\Big)=\bigcap_{S\in\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} S,$$

(10) $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ を(9)と同じものとすると

$$\Big(\bigcup_{S_1\in\mathcal{S}_1} S_1\Big)\cap\Big(\bigcup_{S_2\in\mathcal{S}_2} S_2\Big)=\bigcup_{\substack{S_1\in\mathcal{S}_1\\ S_2\in\mathcal{S}_2}}(S_1\cap S_2).$$

証明 この定理の証明は読者に任せる．

定義 A と B を集合とする．A と B の**デカルト積** $A\times B$ とは，順序のついた組の集合

$$A\times B=[(a,\ b);\ a\in A,\ b\in B]$$

である．A と B の間の**関係**とは，$A\times B$ の部分集合 R のことである．$(a, b)\in R$ のとき，a と b は R-関係にあるという．

例 A と B を実数全体の集合とする．このとき，$A\times B$ は平面である．大小関係 $x\leq y$ は A と B の間の関係である． この関係は， 図 1.1 で影をつけた部分の点の集合である．

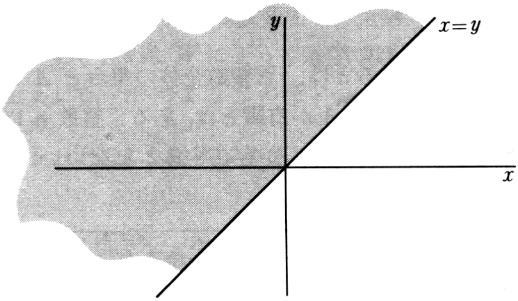


図 1.1

定義 関係 $R \subset A \times A$ が**半順序**であるとは，

（1） $(s_1, s_2) \in R$ かつ $(s_2, s_3) \in R \Longrightarrow (s_1, s_3) \in R$,

（2） $(s_1, s_2) \in R$ かつ $(s_2, s_1) \in R \Longrightarrow s_1 = s_2$

がともに成り立つことをいう．関係Rが**全順序**であるとは，半順序であり，かつ

（3） 任意の $s_1, s_2 \in A$ に対して，$(s_1, s_2) \in R$ か，または $(s_2, s_1) \in R$

が成り立つことをいう．

Aが実数全体の集合のとき，大小関係は全順序の1つの例である．

一般に，関係 $R \subset A \times A$ が半順序（全順序）であるとき，A は R によって半順序（全順序）づけされているという．

定義 A と Bを集合とする．Aを Bに写す**関数** f（f: $A \rightarrow B$ と書く）とは，A と Bの間の関係（$f \subset A \times B$）であって，次の性質をもつもののことである．

（1） $a \in A$ に対して $(a, b) \in f$ なる $b \in B$ が存在する．

（2） $(a, b) \in f$ かつ $(a, b_1) \in f$ ならば $b = b_1$.

性質(1)は，関数 f が A 上のすべてで定義されていることを，また性質(2)は，f が「一価関数」であることを示している．

記号 f: $A \rightarrow B$ とする．等式 $f(a) = b$ は $(a, b) \in f$ であることを意味する．

定義 f: $A \rightarrow B$ とする．各 $b \in B$ に対して $f(a) = b$ となる $a \in A$ が存在するとき，f を**全射**（または上への関数）という．f が全射のとき，$f(A) = B$ と書く．f が**単射**（または1対1の関数）であるとは，$f(a) = f(a_1)$ なら $a = a_1$ が成り立つことをいう．f が全射かつ単射のとき，f を A と B の間の **1対1対応**[1)]

1)［訳注］ A と B の間の1対1対応のことを A から B への全単射ともいう．

という．

定義　集合 A が**可算**であるとは，正整数全体の集合と A との間に 1 対 1 対応が存在することをいう．集合 A が**有限**とは，ある正整数 n に対して集合 $[1, 2, \cdots, n]$ と A との間に 1 対 1 対応が存在することをいい，そのとき A は n 個の元をもつという．

> **定理 2**　$A=[a_1, \cdots, a_n]$ が n 個の元からなる有限集合ならば，A の部分集合全体の集合は 2^n 個の元をもつ．

証明　A を 2 つの元 YES と NO からなる集合 [YES, NO] へ写す関数全体の集合 F を考える．F は 2^n 個の元をもつ．A の部分集合全体の集合 $\mathcal{S}$ と F との間に 1 対 1 対応が存在する．これを示すために，$f: \mathcal{S} \to F$ を次のように定義する．

$B \in \mathcal{S}$ すなわち $B \subset A$ に対して，$f(B)$ を F の元で(すなわち

$$f(B): A \to [\mathrm{YES}, \mathrm{NO}]$$

であって)，次の式で与えられるものとする．

$$f(B)(x) = \begin{cases} \mathrm{YES} & (x \in B \text{ のとき}) \\ \mathrm{NO} & (x \notin B \text{ のとき}). \end{cases}$$

f は単射である．なぜなら：$f(B)=f(C)$ ならば，すべての $x \in A$ に対して $f(B)(x)=f(C)(x)$ である．したがって $f(C)(x)=\mathrm{YES}$ のとき，かつそのときに限り $f(B)(x)=\mathrm{YES}$ である．すなわち $x \in C$ のとき，かつそのときに限り $x \in B$．したがって $B=C$．f は全射である．なぜなら，各関数 $g: A \to [\mathrm{YES}, \mathrm{NO}]$ に対して

$$B=[x;\ g(x)=\mathrm{YES}]$$

とおけば，$B \subset A$ で，かつ $f(B)=g$ が成り立つからである．▩

記号　上の定理からの類推によって，A の部分集合全体の集合を 2^A で表わす．2 つの集合 A と B に対して B^A は関数 $A \to B$ 全体の集合を表わす．

定義　$f \in B^A$ とする．f の**逆** f^{-1} とは，

$$f^{-1}(B_1)=[a \in A;\ f(a) \in B_1] \qquad (B_1 \subset B).$$

で定義される関数 $2^B \to 2^A$ のことである．$f^{-1}(B_1)$ は B_1 の**逆像**とよばれる．

$$f^{-1} \in (2^A)^{2^B}$$

であることに注意せよ．

記号　W を集合とし，$\mathcal{S}$ を集合の族とする．全射である関数 φ: $W \to \mathcal{S}$ が1つ与えられているとき，$\mathcal{S}$ は W によって**添字づけ**されているという．$w \in W$ に対して $\varphi(w)$ を S_w で，W による $\mathcal{S}$ の添字づけを $\{S_w\}_{w \in W}$ で表わす．

定義　$\{S_w\}_{w \in W}$ を W により添字づけされた集合とする．集合 $\{S_w\}_{w \in W}$ の**積**とは，集合

$$\prod_{w \in W} S_w = [f\colon W \to \bigcup_{w \in W} S_w;\ \text{各 } w \in W \text{ に対して } f(w) \in S_w]$$

のことである．集合 W が有限でない場合には，この積は**無限積**とよばれる．この積の概念は2つの集合の（デカルト）積 $S_1 \times S_2$ の概念の拡張である．なぜなら：$W = \{1, 2\}$，$\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ とし，φ: $W \to \mathcal{S}$ を $\varphi(j) = S_j$ $(j = 1, 2)$ によってきめる．このとき $S_1 \times S_2 = [(s_1, s_2);\ s_j \in S_j]$ であり，

$$\prod_{w \in W} S_w = [f\colon \{1, 2\} \to S_1 \cup S_2;\ f(j) \in S_j].$$

後者は $[(f(1), f(2));\ f(j) \in S_j]$ と同一視でき，さらにこれは $S_1 \times S_2$ と同一視できる．

注意　$\prod_{w \in W} S_w$ は関数の集合である．そのような関数が存在するかどうか，すなわち $\prod_{w \in W} S_w \neq \phi$ であるかどうかが問題になる．いいかえれば，無限に多くの空でない集合が与えられたとき，各集合から1つずつその元を選び出すことができるかということである．公理的集合論によれば，集合論の通常の公理によってこの問いに答えることはできない．ここでは，この問いの答が肯定的であることを1つの公理として受け入れる．

選択公理　$\{S_w\}_{w \in W}$ を W によって添字づけされた集合とする．すべての $w \in W$ に対して $S_w \neq \phi$ と仮定する．このとき

$$\prod_{w \in W} S_w \neq \phi.$$

選択公理は他のいくつかの公理と同値であり，次の公理もその1つである．

極大原理　S を R によって半順序づけされた集合とし，T を R によって全順序づけされた S の部分集合とする．このとき，次の条件を満たす集合 M が存在する．

（1）　$T \subset M \subset S$.

（2）　M は R によって全順序づけされている．

（3）　$M \subset N \subset S$ で，N が R によって全順序づけされているなら，$M = N$. すなわち M は T を含む最大の全順序づけされた部分集合である．

1.2 位相空間

定義 **距離空間**とは，集合 S に次の条件を満たす関数 ρ: $S\times S\to$ (非負実数の集合) が与えられたものをいう．任意の $s_1, s_2, s_3\in S$ に対して

（1） $\rho(s_1, s_2)=0$ となるのは $s_1=s_2$ のときであり，かつそのときに限る．

（2） $\rho(s_1, s_2)=\rho(s_2, s_1)$．

（3） $\rho(s_1, s_3)\leq\rho(s_1, s_2)+\rho(s_2, s_3)$．

関数 ρ は S 上の**距離**とよばれる．

距離空間 S の点 s_0 と実数 a に対して，**中心** s_0，**半径** a の**球体**とは，次の集合のことである．

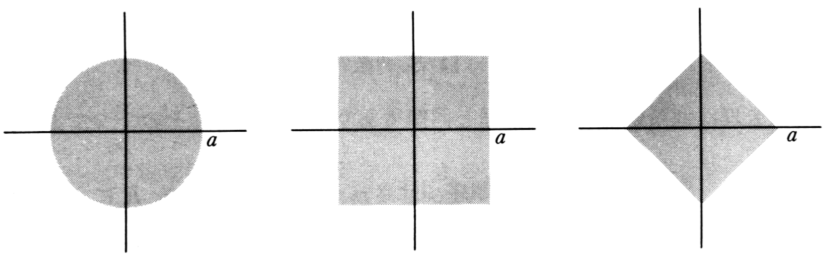
$$B_{s_0}(a)=[s\in S;\ \rho(s, s_0)<a].$$

例 S を平面，すなわち実数全体の集合とそれ自身との積とする．S の上に次のように3つの距離を定義する．

S の中の2点 $P_1=(x_1, y_1)$，$P_2=(x_2, y_2)$ に対して

$$\rho_1(P_1, P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$\rho_2(P_1, P_2)=\max\{|x_2-x_1|, |y_2-y_1|\}$$
$$\rho_3(P_1, P_2)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|.$$

これらの距離に関する中心 $0=(0, 0)$，半径 a の球体は，それぞれ図1.2で影をつけた部分である．球体は必ずしも丸くなく，また滑らかな境界をもつとも限らないことに注意せよ．



$\rho_1(s,0)<a$　　$\rho_2(s,0)<a$　　$\rho_3(s,0)<a$

図 1.2

注意 上で定義した3つの距離は，平面に距離空間として異なる3つの構造を与える．しかし，これらの空間のある性質の研究に関しては，3つの距離は同等である．たとえ

ば，0がある集合 $T \subset S$ の集積点であるかどうかを知りたい場合には，0に収束する T の中の点列が存在するかどうかが問題になる．すなわち T の中の点列 $\{s_n\}$ で，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある N があって，すべての $n > N$ に対して

$$\rho(s_n, 0) < \varepsilon$$

が成り立つようなものが存在するかどうかが問題になる．この問いの答は，ρ として上のどの距離をとるかにはよらないことが容易にわかる．すなわち ρ_1 に対して上の条件を満たすような N が存在することと，ρ_2, ρ_3 に対してそのような N が存在することとは同値である．この答は，半径 ε の球体の形にはよらず，その「ふくらみぐあい」または「開きかげん」だけによるのである．この理由から「開きかげん」を記述するのに必要な距離空間の性質だけを集めて考えるのが便利である．そのような性質を使って，もっと抽象的な構造である“位相構造”が定義され，この構造の中でもまだ集積点を考えることができる．また，上に述べた平面上の3つの距離の構造は同じ「開集合」を与える．

定義　位相空間とは，集合 S で，次の条件を満足する S の部分集合の集まり $\mathcal{U}$（すなわち $\mathcal{U}$ は 2^S の部分集合）が与えられたものである．

(1 a)　$\phi \in \mathcal{U}$,　$S \in \mathcal{U}$,

(2 a)　$U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ ならば $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}$,

(3 a)　$\mathcal{U}$ の任意個数の元の和集合はまた $\mathcal{U}$ の元である．すなわち，

$$\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U} \quad \text{ならば} \quad \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{U}}} U \in \mathcal{U}.$$

$\mathcal{U}$ の元を**開集合**といい，集まり $\mathcal{U}$ を S 上の**位相**という．

注意　$\mathcal{U}$ を表に出さず，位相空間を S だけで表わす場合も多い．

定義　$(S, \mathcal{U})$ を位相空間とする．集合 $A \subset S$ が**閉**であるとは，補集合[1)]が開集合であること，すなわち $A' \in \mathcal{U}$ であることをいう．

注意　上の条件 (1 a), (2 a), (3 a) で補集合をとることによって，閉集合の集まり $\mathcal{C}$ が次の条件を満たすことがわかる．

(1 b)　$\phi \in \mathcal{C}$,　$S \in \mathcal{C}$,

(2 b)　$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{C}$ ならば $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{C}$,

(3 b)　$\mathcal{C}$ の任意個数の元の共通部分は $\mathcal{C}$ の元である．

注意　位相は開集合の集まりを指定するかわりに，閉集合の集まりを指定することによっても記述できる．

定義　$(S, \mathcal{U})$ を位相空間とし，$A \subset S$ とする．点 $s \in S$ が A の**集積点**であるとは，$s \in U$ なる任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して，次式が成り立つことをいう．

$$(U - \{s\}) \cap A \neq \phi.$$

---

1)［訳注］この場合のように，単に補集合というときは，A の S（全集合）での補集合の意味であり，A' で表わす．p. 2 定理1の(7), (8) もこの意味である．

定義　集合 A の**閉包**($\bar{A}$ と書く)とは，集合

$$\bar{A}=A\cup[s\in S;\ s \text{ は } A \text{ の集積点}]$$

のことである．

> **定理 1**　集合 A の閉包 $\bar{A}$ は閉である．

証明　$\bar{A}'$ が開であることをいう．そのためには，各 $s\in\bar{A}'$ に対して開集合 U_s で $s\in U_s\subset\bar{A}'$ なるものが存在することをいえばよい．なぜなら：各 s に対して $s\in U_s$ であることから，$\bar{A}'\subset\bigcup_{s\in\bar{A}}U_s$ がいえる．また，各 s に対して $U_s\subset\bar{A}'$ であることから $\bigcup_{s\in\bar{A}'}U_s\subset\bar{A}'$ がいえる．したがって $\bar{A}'=\bigcup_{s\in\bar{A}'}U_s$ であり，これは開集合の和集合であるから開である．

そこで，$s\in\bar{A}'$ とする．s は A の集積点ではないから，$s\in U_s$ かつ $(U_s-\{s\})\cap A=\phi$ である開集合 U_s が存在する．また $s\notin\bar{A}$ だから $s\notin A$ であり，したがって $U_s\cap A=\phi$ である．U_s の中の各元は，A との共通部分が ϕ である開集合すなわち U_s 自身に含まれているから，U_s は A の集積点を含まず，$U_s\cap\bar{A}=\phi$ である．すなわち $U_s\subset\bar{A}'$．■

> **定理 2**　集合 A は $A=\bar{A}$ のとき，かつそのときに限り閉である．

証明　A を閉とする．このとき A' は開である．$s\notin A$ とすると，A' は s を含む開集合で，かつ $(A'-\{s\})\cap A=\phi$ を満たすから，s は A の集積点ではない．したがって，A のすべての集積点は A に含まれる．すなわち，$A=\bar{A}$．

逆に $A=\bar{A}$ なら，前の定理により A は閉である．■

定義　集合 $\mathscr{B}\subset 2^S$ が S 上の位相の**基**であるとは，次の条件を満たすことをいう．

(1 c)　$\phi\in\mathscr{B}$,

(2 c)　$\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B=S$,

(3 c)　$B_1, B_2\in\mathscr{B}$ ならば，$B_1\cap B_2$ は，ある部分集合 $\tilde{\mathscr{B}}\subset\mathscr{B}$ をとって $B_1\cap B_2=\bigcup_{B\in\tilde{\mathscr{B}}}B$ と書ける．

> **定理 3**　S を集合とし，$\mathscr{B}$ を S 上の位相の基とする．
>
> $$\mathcal{U}_{\mathscr{B}}=[U\in 2^S;\ U \text{ は } \mathscr{B} \text{ の任意個数の元の和集合}]$$
>
> とおくと，$\mathcal{U}_{\mathscr{B}}$ は S 上の位相である．この位相を $\mathscr{B}$ により**生成された**位相という．

証明 $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ が S 上の位相に対する開集合の3つの公理を満たすことを確かめればよい.

基の定義の(1c), (2c)により $\phi, S \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ となるから, 公理(1a)が満たされる.

次に $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ とすると, 各 $V \in \mathcal{V}$ に対して $V = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_V} B$ なる $\mathcal{B}_V \subset \mathcal{B}$ があるから, $\tilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{B}_V$ とおけば $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ で, かつ $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} (\bigcup_{B \in \mathcal{B}_V} B) = \bigcup_{B \in \tilde{\mathcal{B}}} B$ である. したがって, 条件(3a)が成り立つ.

帰納法により(2a)を証明する. $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ の k 個の集合の共通部分は $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ に属すると仮定する($k=1$ に対しては, この仮定は自動的に満たされる). 次に, $U_1, \cdots, U_{k+1} \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ とする. 帰納法の仮定から, $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, すなわち部分集合 $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ が存在して $U_1 \cap \cdots \cap U_k = \bigcup_{B_1 \in \mathcal{B}_1} B_1$ と書ける. $U_{k+1} \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ であるから, 部分集合 $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$ が存在して $U_{k+1} = \bigcup_{B_2 \in \mathcal{B}_2} B_2$ と書ける. したがって

$$U_1 \cap \cdots \cap U_{k+1} = (\bigcup_{B_1 \in \mathcal{B}_1} B_1) \cap (\bigcup_{B_2 \in \mathcal{B}_2} B_2) = \bigcup_{\substack{B_1 \in \mathcal{B}_1 \\ B_2 \in \mathcal{B}_2}} (B_1 \cap B_2)$$

となる. ところが, 基の定義の条件(3c)により, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ である.

したがって $U_1 \cap \cdots \cap U_{k+1} \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$. ▓

定理 4 (S, ρ) を距離空間とする.

$$\mathcal{B} = [B_s(a)\,;\ s \in S \text{ で } a \text{ は負でない実数}]$$

とする. このとき, $\mathcal{B}$ は S 上の位相の基である.

証明 (1) 任意の $s \in S$ に対して $B_s(0) = \phi$ であるから, $\phi \in \mathcal{B}$.

(2) いかなる $a>0$ に対しても $S = \bigcup_{s \in S} B_s(a)$ であるから, $S = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

(3) $s_1, s_2 \in S$ とし, $a_1, a_2 > 0$ とする. そして, $T = B_{s_1}(a_1) \cap B_{s_2}(a_2)$ とし, $T \neq \phi$ と仮定する.

T が $\mathcal{B}$ の元の和集合として書けることをいうためには, 各 $s \in T$ に対して $B_s(a_s) \subset T$ となるような $a_s > 0$ が存在することを示せばよい. なぜなら, もしそうであれば, $T \subset \bigcup_{s \in T} B_s(a_s) \subset T$ となるからである. 最初の包含関係は各 $s \in T$ に対して $s \in B_s(a_s)$ であることから, 次の包含関係は各 s に対して $B_s(a_s) \subset T$ であることからわかる. したがって, $T = \bigcup_{s \in T} B_s(a_s)$ は $\mathcal{B}$ の元の和集合である.

さて, $s \in T$ に対して $b_j = \rho(s, s_j)$ $(j=1, 2)$ とする. $s \in B_{s_j}(a_j)$ であるから $b_j < a_j$ である. $a_s = \min\{a_1 - b_1, a_2 - b_2\}$ とすると, $a_s > 0$ である. 次に, $B_s(a_s) \subset T$ であることを示す. $t \in B_s(a_s)$ とすると

$$\rho(t,\ s_j)\leq\rho(t,\ s)+\rho(s,\ s_j)<a_s+b_j\leq a_j-b_j+b_j=a_j$$

となり，$t\in B_{s_j}(a_j)$ $(j=1,\ 2)$ となる．▩

> **系**　距離空間は位相空間としての構造をもち，その開集合は球体の和集合の形に書ける集合である．

定義　S を集合とし，$\mathscr{B}_1$ と $\mathscr{B}_2$ を S 上の位相の 2 つの基とする．$\mathscr{B}_1$ と $\mathscr{B}_2$ が**同値**であるとは，それらが同じ位相を生成すること，すなわち $\mathcal{U}_{\mathscr{B}_1}=\mathcal{U}_{\mathscr{B}_2}$ となることをいう．

> **定理 5**　S を集合とし，$\mathscr{B}_1$ と $\mathscr{B}_2$ を S 上の位相の基とする．$\mathscr{B}_1$ と $\mathscr{B}_2$ が同値であるための必要十分条件は，次の 2 つが成り立つことである．
>
> （1）　各 $s\in S$ と，$s\in B_1$ であるような $B_1\in\mathscr{B}_1$ に対して，$s\in B_2\subset B_1$ であるような $B_2\in\mathscr{B}_2$ が存在する．
>
> （2）　各 $s\in S$ と，$s\in B_2$ であるような $B_2\in\mathscr{B}_2$ に対して，$s\in B_1\subset B_2$ であるような $B_1\in\mathscr{B}_1$ が存在する．

証明　$\mathscr{B}_1$と $\mathscr{B}_2$ が同値であるとし，$s\in B_1\in\mathscr{B}_1$ とする．$B_1\in\mathcal{U}_{\mathscr{B}_1}=\mathcal{U}_{\mathscr{B}_2}$ であるから，ある部分集合 $\widetilde{\mathscr{B}}_2\subset\mathscr{B}_2$ があって $B_1=\bigcup_{B_2\in\widetilde{\mathscr{B}}_2}B_2$ と書ける．したがって，ある $B_2\in\widetilde{\mathscr{B}}_2\subset\mathscr{B}_2$ に対して $s\in B_2\subset B_1$ となる．これで(1)が証明された．(2)も同様に証明される．

逆に，(1)と(2)を満たすとしよう．最初に $\mathcal{U}_{\mathscr{B}_1}\subset\mathcal{U}_{\mathscr{B}_2}$ を示す．$B\in\mathscr{B}_1$ とする．(1)によって，各 $s\in B$ に対して $s\in B_s\subset B$ であるような $B_s\subset\mathscr{B}_2$ が存在する．よって $B\subset\bigcup_{s\in B}B_s\subset B$ となり，$B=\bigcup_{s\in B}B_s\in\mathcal{U}_{\mathscr{B}_2}$ である．したがって $\mathcal{U}_{\mathscr{B}_1}\subset\mathcal{U}_{\mathscr{B}_2}$．同様に，(2)により $\mathcal{U}_{\mathscr{B}_2}\subset\mathcal{U}_{\mathscr{B}_1}$ となり，$\mathcal{U}_{\mathscr{B}_1}=\mathcal{U}_{\mathscr{B}_2}$．▩

> **系**　前に述べた平面 S 上の 3 つの距離 $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3$ は，すべて S 上の同じ位相をきめる．

証明　定理 5 の条件(1)と(2)が明らかに満たされる．▩

注意　しかしながら，与えられた空間上のすべての距離が同じ位相を与えるということは正しく“ない”．たとえば，実数の空間 R 上に次の 2 つの距離を考える．

$$\rho_1(r_1,\ r_2)=|r_1-r_2|$$

$$\rho_2(r_1,\ r_2)=\begin{cases}0 & (r_1=r_2)\\ 1 & (r_1\neq r_2).\end{cases}$$

ρ_1 によって定義される位相での開集合は，R における(開区間で生成される)普通の開集

合である．一方，ρ_2 によって定義される開集合の集まりは，$\boldsymbol{R}$ のすべての部分集合の集合 $2^{\boldsymbol{R}}$ である．実際，ρ_2 に関しては，各 r に対して $B_r(1/2)=\{r\}$ であるから，おのおのの「点」が開集合である．したがって，「点」の任意の和集合すなわち $\boldsymbol{R}$ の任意の部分集合は開集合である．

定義 $(S, \mathcal{U})$ が位相空間で，$\mathcal{U}=2^S$ のとき S は**離散位相**をもつという．

定理 6 $(S, \mathcal{U})$ を位相空間とし，$A\subset S$ とする．

$$\mathcal{U}_A=[A\cap U;\ U\in\mathcal{U}]$$

とすると，$\mathcal{U}_A$ は A 上の位相である．この位相を A 上の**相対位相**という．

証明 次のことからでる．

(1) $\phi\cap A=\phi$, $S\cap A=A$,

(2) $\bigcap_{i=1}^{n}(U_i\cap A)=(\bigcap_{i=1}^{n}U_i)\cap A$,

(3) $\bigcup_{\tilde{U}\in\tilde{\mathcal{U}}}(\tilde{U}\cap A)=(\bigcup_{\tilde{U}\in\tilde{\mathcal{U}}}\tilde{U})\cap A$. ▮

注意 部分空間を扱っているときには，どの位相が使われているのかを指定するように注意しなければならない．たとえば，U を開区間 $(1,3)\subset\boldsymbol{R}$ とし，A を閉区間 $[2,4]\subset\boldsymbol{R}$ としたとき，$U\cap A$ は A の中で開であるが，$\boldsymbol{R}$ の中では開ではない．しかしながら，A が開あるいは閉のときには，次の定理が成り立つ．

定理 7 S を位相空間とし，$A\subset S$ とする．A が S の中で開ならば，A の中の任意の開集合は S の中で開である．A が S の中で閉ならば，A の中の任意の閉集合は S の中で閉である．

証明 A が S の中で開で，B が A の中で開とすると，S の中のある開集合 U に対して $B=U\cap A$ と書ける．U と A はともに S の中で開であるから，B は S の中で開である．

A が S の中で閉で，B が A の中で閉とすると，$A-B$ は A の中で開であるから，S の中のある開集合 U に対して $A-B=A\cap U$ と書ける．したがって

$$B=A-(A-B)=A-(A\cap U)=A\cap U'.$$

A と U' はともに S の中で閉であるから，$A\cap U'=B$ も閉である． ▮

定理 8 S を位相空間とし，$Q\subset S$ は相対位相をもっているとする．P を Q の部分集合とする．このとき，Q の部分集合として考えた P 上の相対位相 $\mathcal{U}_1$ と，S の部分集合として考えた P 上の相対位相 $\mathcal{U}_2$ は一致する．

証明 $A\subset P$ とする．このとき

$$
\begin{aligned}
A\in\mathcal{U}_1 &\Leftrightarrow \text{ある開集合 } U\subset Q \text{ に対して } A=P\cap U\\
&\Leftrightarrow \text{ある開集合 } \tilde{U}\subset S \text{ に対して } A=P\cap(Q\cap\tilde{U})\\
&\Leftrightarrow \text{ある開集合 } \tilde{U}\subset S \text{ に対して } A=P\cap\tilde{U}\ (\text{なぜならば } P\subset Q)\\
&\Leftrightarrow A\in\mathcal{U}_2.
\end{aligned}
$$

▒

1.3 連結およびコンパクト位相空間

定義 位相空間 S が**連結**であるとは，開かつ閉である集合が ϕ と S だけに限ることをいう．

> **定理 1** 位相空間 S が連結なのは，それが，2つの交わらない空でない開集合の和で表わせないときであり，かつそのときに限る．

証明 S を連結と仮定する．$V_1\cap V_2=\phi$ なる開集合 V_1, V_2 に対して $S=V_1\cup V_2$ であるとすると，$V_1=V_2'$ であるから V_1 は開だけでなく閉でもある．S は連結であるから，$V_1=\phi$ かあるいは $V_1=S$ である．$V_1=S$ なら $V_2=\phi$ となり，いずれの場合も V_1 かあるいは V_2 が空集合でなければならない．

逆に，S が2つの交わらない空でない開集合の和ではないとする．$V\subset S$ を開かつ閉とすると，V' もまた開かつ閉である．S は交わらない開集合 V と V' の和である．したがって，$V=\phi$ かあるいは $V'=\phi$，すなわち $V=\phi$ かあるいは $V=S$ となり，S は連結である．▒

例 次の空間が連結であることは実解析学で示される．

（1） 実数の空間 R,

（2） R の中の任意の区間,

（3） 実 n 次元空間 R^n,

（4） R^n の中の任意の球体または立方体.

注意 位相空間の部分集合は，相対位相で連結のとき連結という．

> **定理 2** S を位相空間とし，T_0 と $\{T_w\}_{w\in W}$ を S の連結な部分集合とする．各 $w\in W$ に対して $T_0\cap T_w\neq\phi$ ならば，$T_0\cup(\bigcup_{w\in W}T_w)$ も連結である．

注意 この定理を用いれば，R^n の中の直線が連結ということから R^n が連結であることを証明できる．実際，$T_0=\{0\}$，$\{T_w\}_{w\in W}$ を，原点を通るすべての直線の集合とすれば，$R^n=T_0\cup(\bigcup_{w\in W}T_w)$ である(添字の集合 W は R^n の中の単位球面にとればよい)．

証明 $T=T_0\cup(\bigcup_{w\in W}T_w)$ とする．T の中の交わらない開集合 V_1, V_2 に対して $T=V_1\cup V_2$ とする．このとき，各 $w\in W$ に対して $V_1\cap T_w$ と $V_2\cap T_w$ は T_w の中の交わらない開集合で，それらの和は T_w になる．T_w は連結であるから，$V_1\cap T_w=\phi$ かまたは $V_2\cap T_w=\phi$ である．同様に，$V_1\cap T_0=\phi$ かまたは $V_2\cap T_0=\phi$ である．どちらでも同じであるから，$V_2\cap T_0=\phi$ とすると，$V_1\cap T_0=T_0$ すなわち $T_0\subset V_1$ である．$T_0\cap T_w\neq\phi$ であるから，各 $w\in W$ に対して $V_1\cap T_w\neq\phi$ である．したがって前に述べたことから，各 $w\in W$ に対して $V_2\cap T_w=\phi$ であり，$V_1\cap T_w=T_w$，すなわち各 $w\in W$ に対して $T_w\subset V_1$ である．結局 $V_1=T_0\cup(\bigcup_{w\in W}T_w)$ となり，$V_2=\phi$ である．▨

例 $n>1$ に対して $R^n-\{0\}$ は連結である．このことを証明せよ．

定義 S を集合とする．集まり $\mathcal{V}\subset 2^S$ が S の**被覆**であるとは，$\bigcup_{V\in\mathcal{V}}V=S$ であることをいう．さらに S が位相空間で，各集合 $V\in\mathcal{V}$ が開のとき，$\mathcal{V}$ を S の**開被覆**とよぶ．

位相空間 S が**コンパクト**であるとは，任意の開被覆が有限部分被覆をもつこと，すなわちどのような開被覆 $\mathcal{V}$ に対しても，有限個の集合 $V_1, V_2, \cdots, V_k\in\mathcal{V}$ が存在して，$S=\bigcup_{i=1}^{k}V_i$ と書けることである．

例 次のことは実解析学で示される．

（1） R^n の中のコンパクト集合は有界閉集合であり，逆も成り立つ (Heine-Borel の定理)．

（2） R^n はコンパクトでない．

（3） R^1 の中の開区間はコンパクトでない．

定義 位相空間が**有限交叉性**をもつとは，任意の閉集合の族 $\mathcal{F}$ が次の性質(i)をもつならば，性質(ii)をもつことをいう．

（i） 任意の有限部分族 $\{F_1, F_2, \cdots, F_k\}\subset\mathcal{F}$ に対して $F_1\cap\cdots\cap F_k\neq\phi$.

（ii） $\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F\neq\phi$.

> **定理 3** S を位相空間とする．S がコンパクトなことと S が有限交叉性をもつこととは同値である．

証明 補集合をとることにより，S の中の閉集合の族 $\mathcal{F}$ と S の中の開集合の族 $\mathcal{V}$ とは 1 対 1 に対応する．すなわち，対応 $\mathcal{V}\longleftrightarrow\mathcal{F}$ が $\mathcal{V}=[F';\ F\in\mathcal{F}]$ あるいは $\mathcal{F}=[V';\ V\in\mathcal{V}]$ で与えられる．そこで，$\mathcal{V}$ を $\mathcal{F}$ に対応するもの

とすると

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F=\phi \Leftrightarrow \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V=S.$$

すなわち，$\mathcal{V}$ が開被覆であることと $\mathcal{F}$ が性質(ii)を満たさないこととは同値であり，$\mathcal{V}$ が有限部分被覆をもつことと $\mathcal{F}$ が性質(i)を満たさないこととが同値である．▒

> **定理 4**　コンパクト空間の任意の閉部分集合は相対位相に関してコンパクトである．

証明　A をコンパクト空間 S の閉部分集合とする．A が有限交叉性をもつことを示そう．$\mathcal{F}$ を，性質(i)を満たす A の閉部分集合の任意の族とする．A は閉で，各 $F\in\mathcal{F}$ も A の中で閉であるから，各 $F\in\mathcal{F}$ は S の中で閉である．したがって，$\mathcal{F}$ は性質(i)を満たす S の中の閉集合の族である．S はコンパクトであるから $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\neq\phi$．ところが $\mathcal{F}$ は性質(i)を満たす A の閉部分集合の任意の族であるから，A は有限交叉性をもつ．▒

> **定理 5**　S をコンパクトな位相空間とする．S の中の任意の無限部分集合は集積点をもつ．

証明　A が集積点をもたないなら，A が有限集合であることを示す．証明は3段階に分かれる．

第1段：A は離散的，すなわちその相対位相が離散位相である．それを示すために $a\in A$ とする．a は A の集積点ではないから，a を含む開集合 $U_a\subset S$ で $(U_a-\{a\})\cap A=\phi$ すなわち $U_a\cap A=\{a\}$ となるものが存在する．したがって，各 $\{a\}$ は A の相対位相で開集合であるから，A は離散的である．

第2段：A はコンパクトである．実際，A は集積点をもたないから $A=\overline{A}$ であり，A は閉である．したがって，定理4より，A はコンパクトである．

第3段：A は有限である．これを示すために，各 $a\in A$ に対して $U_a=\{a\}$ とおく．第1段より，$\{U_a\}_{a\in A}$ は A の開被覆である．第2段より A はコンパクトであるから，有限部分被覆 $\{U_{a_1},\cdots,U_{a_k}\}$ が存在する．

したがって $A=\bigcup_{j=1}^{k} U_{a_j}=\{a_1,\cdots,a_k\}$ は有限である．▒

1.4　連続関数

定義　S と T を位相空間とする．関数 $f\colon S\rightarrow T$ が**連続**であるとは，開集

合の逆像が開であることをいう．すなわち，任意の開集合 $U \subset T$ に対して $f^{-1}(U)$ が S の中で開であることをいう．

定理 1 S と T を位相空間とする．$\mathcal{B}_S$ と $\mathcal{B}_T$ をそれぞれ S と T の基とすると，f が連続であることは，任意の $s \in S$ と任意の $f(s) \in V$ なる $V \in \mathcal{B}_T$ に対して，$s \in U$ かつ $f(U) \subset V$ なる $U \in \mathcal{B}_S$ が存在することと同値である．

注意 上の定理は，距離空間の場合に，われわれの連続性の定義と通常の ε-δ 論法による連続性の定義が同値であることを示している．

証明 f を連続とする．$s \in S$ かつ $f(s) \in V \in \mathcal{B}_T$ ならば，$f^{-1}(V)$ は S の中で開であるから $\mathcal{B}_S$ の元の和集合で書ける．$s \in f^{-1}(V)$ であるから，s はこの基の元の1つに含まれる．その元を U とすると，$U \subset f^{-1}(V)$ であるから $f(U) \subset V$ である．

逆に，各 s と V に対して上のような U が存在するとしよう．$\tilde{V}$ を T の中の開集合とする．$f^{-1}(\tilde{V})$ が S で開であることを示そう．$s \in f^{-1}(\tilde{V})$ とすると $f(s) \in \tilde{V}$ であるから，$f(s)$ は $V_s \subset \tilde{V}$ なるある基の元 $V_s \in \mathcal{B}_T$ に含まれる．したがって基の元 $U_s \in \mathcal{B}_S$ が存在して，$s \in U_s$ かつ $f(U_s) \subset V_s \subset \tilde{V}$ となる，すなわち $U_s \subset f^{-1}(\tilde{V})$．すると $f^{-1}(\tilde{V}) = \bigcup_{s \in f^{-1}(\tilde{V})} U_s$ となり，$f^{-1}(\tilde{V})$ は S の中で開である．▩

定理 2 R, S, T を位相空間とする．$g: R \to S$ と $f: S \to T$ がともに連続とすると，$f \circ g: R \to T$ も連続である．

証明 V を T の中の開集合とする．f は連続であるから $f^{-1}(V)$ は S で開．したがって g が連続なことより，$g^{-1}(f^{-1}(V))$ は R で開．ところが，$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ であるから $(f \circ g)^{-1}(V)$ は R で開となり，$f \circ g$ は連続である．▩

定理 3 S と T を位相空間とする．$f: S \to T$ を連続かつ全射とする．このとき，S が連結なら T も連結である．

証明 V_1 と V_2 を $V_1 \cup V_2 = T$ かつ交わらない T の中の開集合とする．このとき，$f^{-1}(V_1)$ と $f^{-1}(V_2)$ は，$f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) = S$ かつ交わらない S の中の開集合である．S は連結であるから，$f^{-1}(V_1)$ か $f^{-1}(V_2)$ のいずれかは空でなければならない．ところが，f は全射であったから，ある j に対して

$f^{-1}(V_j)=\phi$ ならば $V_j=\phi$ である．したがって T は連結である．▒

系　$f\colon S\to T$ が連続かつ S が連結ならば $f(S)$ も連結である．

例 1　$f\colon [a, b]\to R^1$ を a から b までの閉区間で定義された連続な実数値関数とする．ある $x_1\in[a, b]$ に対して $f(x_1)>0$ で，かつ，ある $x_2\in[a, b]$ に対して $f(x_2)<0$ とすると，ある $x_0\in[a, b]$ に対して $f(x_0)=0$ となる．

証明　$T=f([a, b])$ とすると，$[a, b]$ は連結であるから，系により T も連結である．ところが $0\notin T$ ならば，$T=(R_-\cap T)\cup(R_+\cap T)$ は空でない交わらない開集合の和集合である．ここで，R_+ は正の実数の集合，R_- は負の実数の集合である．したがって $0\in T$，すなわちある x_0 に対して $0=f(x_0)$．▒

例 2　S^n を R^{n+1} の中の単位球面とする．すなわち

$$S^n=\left[(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1})\in R^{n+1};\ \sum_{j=1}^{n+1}x_j{}^2=1\right].$$

このとき，$n>0$ に対して S^n は連結である．

証明　1.3 節より，$R^{n+1}-\{0\}$ が連結なことはわかっている．さて

$$f\colon R^{n+1}-\{0\}\to S^n$$

を

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1})=\left(\frac{x_1}{\sqrt{\sum x_j{}^2}},\ \frac{x_2}{\sqrt{\sum x_j{}^2}},\ \cdots,\ \frac{x_{n+1}}{\sqrt{\sum x_j{}^2}}\right)$$

によって定義すると，f は連続かつ全射である．したがって S^n は連結．▒

例 3　$GL(n, R)$ と $GL(n, C)$ を，それぞれ実数と複素数を成分にもつ正則な $n\times n$ 行列全体の集合とする．各行列のすべての行を横に一直線に並べることにより，$GL(n, R)$ は R^{n^2} の部分集合とみなせる．また，それによって R^{n^2} の部分集合としての相対位相がはいり，位相空間になる．同様に，$GL(n, C)\subset C^{n^2}$ も位相空間である(複素 n^2 次元空間 C^{n^2} は R^2 を n^2 回掛け合わせて得られる積空間の位相をもっている)．このとき，$GL(n, R)$ は連結で“ない”．なぜなら

$$\varDelta\colon GL(n, R)\to R^1-\{0\}$$

を，各行列にその行列式を対応させる関数とすると，$\varDelta$ は連続かつ全射である．$R^1-\{0\}$ は連結でないから $GL(n, R)$ も連結でない．

この議論は $GL(n, C)$ の場合には通用しない．なぜなら $\varDelta\colon GL(n, C)\to C-\{0\}$ であり，$C-\{0\}=R^2-\{0\}$ は連結であるからである．実際，あとでわかるように，$GL(n, C)$ は連結である．

定理 4 S と T を位相空間，$f: S\to T$ を連続かつ全射とする．このとき，S がコンパクトなら T もコンパクトである．

証明 $\mathcal{V}$ を T の開被覆とすると，$[f^{-1}(V);\ V\in\mathcal{V}]$ は S の開被覆である．S はコンパクトであるから，有限部分被覆

$$\{f^{-1}(V_1),\ \cdots,\ f^{-1}(V_k)\}$$

が存在する．f は全射であるから，$j=1,\ \cdots,\ k$ に対して $f(f^{-1}(V_j))=V_j$ かつ $\bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}(V_j)=S$ より $\bigcup_{j=1}^{k} V_j=T$ である．したがって T はコンパクト． ▮

系 1 $f: S\to T$ を連続，S をコンパクトとすると，$f(S)$ もコンパクトである．

系 2 $f: S\to R^1$ を連続とする．S がコンパクトなら，f は最大値と最小値をとる．

証明 定理 4 によって $f(S)$ はコンパクトであるから，R^1 の中の有界閉集合である．$f(S)$ の最小上界は $\overline{f(S)}$ の点である．$f(S)$ は閉であるから，それは $f(S)$ に含まれる．これが f の最大値．f の最小値についても同様． ▮

定義 S と T を位相空間とし，$f: S\to T$ とする．f が 1 対 1 対応であって f も f^{-1} も連続なとき，f を**同相写像**という．

注意 1 f^{-1} は $2^T\to 2^S$ の写像として定義されたが，f が 1 対 1 対応の場合には，1 点の集合 $\{t\}$ と t を，また $f(s)=t$ なるとき $f^{-1}(\{t\})$ と s を同一視することによって，$T\to S$ の写像とみなせる．

注意 2 f が同相写像のとき f も f^{-1} も連続であるということは，f が S の点を T の点に 1 対 1 対応で写すことだけでなく，S の開集合を T の開集合に 1 対 1 対応で写すことをも意味している．このことは，S が満たす位相的性質をすべて T もまた満たし，逆も真であるということである．したがって，$f: S\to T$ が同相写像ならば，S が連結なことと T が連結なこととは同値であり，S がコンパクトなことと T がコンパクトなこととは同値である．

1.5 積 空 間

定義 T を集合とし，$\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ を T 上の 2 つの位相とする．位相 $\mathcal{U}$ が位相 $\mathcal{V}$ より**弱い**とは，$\mathcal{U}\subset\mathcal{V}$ であることをいう．あるいは，恒等写像

$$I:\ (T,\ \mathcal{V})\to(T,\ \mathcal{U})$$

が連続であることといっても同じである.

> **定理 1** S を集合とし, $\mathcal{W}\subset 2^S$ とする. このとき, $\mathcal{W}\subset\mathcal{U}$ なる S 上の最も弱い位相 $\mathcal{U}$ が存在する.

証明 $\mathcal{A}=[\mathcal{V};\ \mathcal{W}\subset\mathcal{V}\subset 2^S,\ \mathcal{V}$ は S 上の位相$]$

とする. $2^S\in\mathcal{A}$ であるから $\mathcal{A}\neq\phi$. $\mathcal{U}=\bigcap_{\mathcal{V}\in\mathcal{A}}\mathcal{V}$ とすると $\mathcal{W}\subset\mathcal{U}$. さらに, $\mathcal{U}$ は S 上の位相である. すなわち, $\mathcal{U}$ は開集合の公理を満たす. 実際

(1) 各 $\mathcal{V}\in\mathcal{A}$ に対して $\phi, S\in\mathcal{V}$ であるから, $\phi, S\in\mathcal{U}$.

(2) $U_1, \cdots, U_k\in\mathcal{U}$ なら, 各 $\mathcal{V}\in\mathcal{A}$ に対して $U_1, \cdots, U_k\in\mathcal{V}$ であるから, 各 $\mathcal{V}\in\mathcal{A}$ に対して $\bigcap_{j=1}^{k}U_j\in\mathcal{V}$ となる. したがって $\bigcap_{j=1}^{k}U_j\in\mathcal{U}$.

(3) W をある添字の集合とし, 各 $w\in W$ に対して $U_w\in\mathcal{U}$ とすると, 各 $w\in W$ と各 $\mathcal{V}\in\mathcal{A}$ に対して $U_w\in\mathcal{V}$ である. したがって $\bigcup_{w\in W}U_w\in\mathcal{V}$ となるから, $\bigcup_{w\in W}U_w\in\mathcal{U}$.

したがって $\mathcal{U}$ は S 上の位相である. $\tilde{\mathcal{U}}$ を, $\mathcal{W}$ を含むもう 1 つの位相とすると, $\tilde{\mathcal{U}}\in\mathcal{A}$ であるから $\mathcal{U}=\bigcap_{\mathcal{V}\in\mathcal{A}}\mathcal{V}\subset\tilde{\mathcal{U}}$ となり, $\mathcal{U}$ は $\mathcal{W}$ を含む最も弱い位相である. ▮

注意 $\mathcal{W}$ を含む最も弱い S 上の位相 $\mathcal{U}$ の基は

$$\mathcal{B}=[U_1\cap\cdots\cap U_k;\ j=1, 2, \cdots, k \text{ に対して } U_j\in\mathcal{W},\ k \text{ は正整数}]$$

で与えられる(ただし $\mathcal{B}$ には ϕ と S を加える).

問題 上の注意を証明せよ.

注意 $\mathcal{U}$ は 2 つの違った見方ができる. つまり, $\mathcal{W}$ を含む S 上のすべての位相の共通部分として, また $\mathcal{W}$ によって「生成された」位相として考えることができる. これは, ちょうど線形代数学の次のような場合と同じような状況である. W をベクトル空間 V の部分集合としたとき, W を含む最小の V の部分空間は W を含むすべての部分空間の共通部分であり, また W によって張られる線形空間でもある.

> **定理 2** W を添字の集合とし, $\{T_w\}_{w\in W}$ を位相空間とする. S を集合とし, $\{f_w\}_{w\in W}$ を写像 $f_w\colon S\to T_w$ の集まりとする. このとき, 各 $w\in W$ に対して $f_w\colon S\to T_w$ を連続にする最も弱い S 上の位相が存在する.

証明 $\mathcal{W}=[f_w^{-1}(V_w);\ V_w$ は T の中で開, $w\in W]$ とする. $\mathcal{U}$ を, $\mathcal{W}$ を含む最も弱い位相とする. 明らかに, 各 f_w を連続にする S 上の位相は $\mathcal{W}$ を含まなければならない. $\mathcal{U}$ は, そのような位相で最も弱いものである. ▮

注意 集合

$$\mathcal{B}=[\bigcap_{w\in W_1}f_w^{-1}(V_w);\ W_1 \text{ は } W \text{ の有限部分集合, 各 } w\in W_1 \text{ に対して } V_w \text{ は } T_w \text{ で開}]$$

が定理2の位相 $\mathcal{U}$ の基である．

定義　$\{S_w\}_{w\in W}$ を位相空間の族とする．$P=\prod_{w\in W} S_w$（集合としての積）とする．各 $w\in W$ に対して $\pi_w\colon P\to S_w$ を

$$\pi_w(f)=f(w) \qquad (f\in P)$$

によって定義する（点 $f\in\prod_{w\in W} S_w$ は，各 $w\in W$ に対して $f(w)\in S_w$ となる関数

$$f\colon W\to\bigcup_{w\in W} S_w$$

であったことに注意）．P 上の**積位相**とは，各 π_w を連続にする最も弱い位相をいう．この位相は定理2によって存在する．

注意　関数 π_w $(w\in W)$ は S_w の成分への射影である．積位相の基は

$\mathcal{B}=[\bigcap_{w\in W_1}\pi_w{}^{-1}(U_w)$；$W_1$ は W の有限部分集合，各 $w\in W_1$ に対して U_w は S_w で開]

で与えられる．

この開集合の基をもう少し詳しく調べてみよう．最初に，各 $w_0\in W$ と任意の開集合 $U_{w_0}\subset S_{w_0}$ に対して $\pi_{w_0}{}^{-1}(U_{w_0})$ は「円筒」$\prod_{w\in W} T_w$ である．ここで

$$T_w=\begin{cases}S_w & (w\neq w_0)\\ U_{w_0} & (w=w_0)\end{cases}$$

である．実際

$$\begin{aligned}f\in\pi_{w_0}{}^{-1}(U_{w_0}) &\Leftrightarrow \pi_{w_0}(f)\in U_{w_0}\Leftrightarrow f(w_0)\in U_{w_0}\\ &\Leftrightarrow \text{各 } w\in W \text{ に対して } f(w)\in T_w\\ &\Leftrightarrow f\in\prod_{w\in W} T_w.\end{aligned}$$

共通部分をとることによって

$$\bigcap_{w\in W_1}\pi_w{}^{-1}(U_w)=\prod_{w\in W} Q_w$$

ここで

$$Q_w=\begin{cases}S_w & (w\notin W_1)\\ U_w & (w\in W_1)\end{cases}$$

である．したがって，P 上の位相の基 $\mathcal{B}$ は，有限個を除いては全空間 S_w である S_w の開集合の積からできている．

例 1　開区間 $(0, 1)$ を I で表わす．$I\times I$ は R^2 の中の開単位正方形である．射影 $\pi_j\colon I\times I\to I$ $(j=1, 2)$ は

$$\pi_1(a, b)=a, \quad \pi_2(a, b)=b$$

によって定義される．

I の中の開区間 U_1 に対して円筒 $\pi_1{}^{-1}(U_1)$ は，図1.3で影をつけた垂直の帯である．I の中の開区間 U_2 に対して $\pi_2{}^{-1}(U_2)$ は，図1.4で影をつけた水平の帯である．

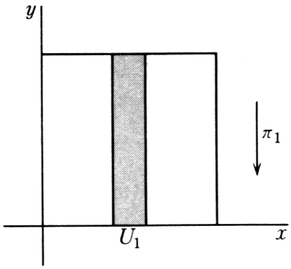


図 1.3

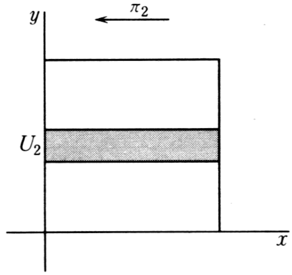


図 1.4

したがって $\pi_1{}^{-1}(U_1)\cap\pi_2{}^{-1}(U_2)$ は，図 **1.5** における開矩形になる．

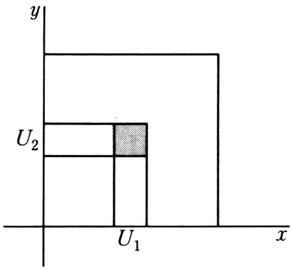


図 1.5

開区間は I 上の位相の基をなすから，開矩形は $I\times I$ 上の積位相の基をなす．すなわち $I\times I$ 上の積位相は，距離空間 R^2 の位相から相対位相で導かれた位相と一致する．

例 2　円周 S^1 は R^2 の部分集合であるから，R^2 から導かれた位相によって位相空間をなす．円周とそれ自身の積 $S^1\times S^1$ は“トーラス”(ドーナツの表面)である．トーラス上の積位相においては，開集合の基は図 1.6 のような「矩形の切れはし」で与えられる．読者にとって，$S^1\times S^1$ 上の積位相と，トーラスを R^3 の部分集合と考えて導かれた位相とが一致するのを確かめるのはよ

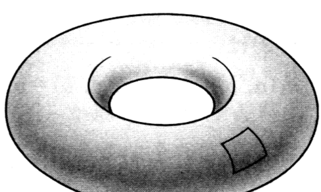


図 1.6

い勉強になろう．

例 3 正の実数全体を R_+ で表わし，R^{n+1} の中の単位球面を S^n で表わす．このとき，

$$\varphi(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1})=\left(\|x\|,\ \left(\frac{x_1}{\|x\|},\ \cdots,\ \frac{x_{n+1}}{\|x\|}\right)\right)$$

で与えられる1対1対応

$$\varphi:\ R^{n+1}-\{0\}\to R_+\times S^n$$

が存在する．ただし，$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{n+1}x_j{}^2\right)^{1/2}$ である．実は，φ は相対位相をもつ $R^{n+1}-\{0\}$ と積位相をもつ $R_+\times S^n$ との同相写像である．ここで，R_+ と S^n には，それぞれ R^1 と R^{n+1} の部分集合として位相がはいっているものとする．

例 4 $J^+=\{n;\ n$ は正の整数$\}$ とし，$I_n=[0,\ 1/n]$ とする．$P=\prod_{n\in J^+}I_n$ は積位相によって位相空間になる．次のように，点の集合 P 上に距離を入れる．$\bar{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots)$ と $\bar{y}=(y_1,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots)$ を P の点としたとき

$$\rho(\bar{x},\ \bar{y})=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2\right)^{1/2}.$$

問題 上の級数が収束して ρ が意味をもつことを示せ．ρ が P 上の距離になり，その距離による P の位相は積位相と一致することを示せ．

1.6 チコノフの定理

積空間のもつ最も重要な性質の1つが，次の定理で与えられる．実際この定理が，無限積に対して1.5節で述べた積位相が(たとえば開集合の基として，無限個の成分に対して開真部分集合を許した積をとった場合よりも)よい位相であることの1つの強い理由である．

定理 1 (チコノフの定理) コンパクト空間の積はコンパクトである．

証明はこの節の終りに行なう．

注意 最初に定理1の応用を考える．コンパクトな空間の上で定義された連続な実数値関数は，定義域がコンパクトでなければもたないよい性質をいくつももつことが解析学で知られている．たとえば，コンパクト集合上の連続な実数値関数は最大値をとることなどである．そこで，コンパクトでない集合 S の上で定義された連続関数が，いつコンパクト集合 $C\supset S$ 上で定義された連続関数に拡張できるかという問題を考えるのは意味がある．

定義 f: $S\to T$ を連続，$S\subset C$ としたとき，f の**連続な拡張** g とは連続写

像 $g: C \to T$ で，$g(s)=f(s)$ $(s \in S)$すなわち $g|_S=f$ が成り立つものをいう．

例 1 Sを半開区間 $(0, 1]$ とする．$f: S \to R^1$ を $x \in (0, 1]$ に対して $f(x)=\sin x$ によって定義する．Sはコンパクトではないが，$f(0)=0$ とおくことによって，コンパクト集合である閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数に拡張できることは明らかである．

例 2 前と同様に $S=(0, 1]$ とする．今度は $f: S \to R^1$ を次式で定義する．

$$f(x)=\sin(1/x) \qquad (x \in S)$$

今度も f はコンパクトでない集合 S 上の連続関数であるが，明らかに f はコンパクト集合 $[0, 1]$ 上の連続関数には拡張できない．すなわち，1点を加えてコンパクトにし，その上へ f を連続に拡張することはできない．しかし，十分多くの点を「加える」なら，コンパクトな空間 P と，連続写像 $\varphi: S \to P$ (実は，φ は $\varphi(S) \subset P$ の上への同相写像であることがわかる)と，連続写像 $\tilde{f}: P \to R^1$ が得られて，次の(1)，(2)が成り立つ．

（1） $\varphi(S)$ は P の中で稠密，すなわち $\overline{\varphi(S)}=P$,

（2） $\tilde{f}\circ\varphi=f$.

結局，S を同相な集合 $\varphi(S)$ におきかえる，つまり f を同相写像 φ^{-1} によって $\varphi(S)$ 上の関数と考えると，コンパクト集合 $P \supset \varphi(S)$ 上の連続関数 $\tilde{f}$ に拡張できる．

P を次のようにしてつくる．$I=[-1, 1]$ とし，P_1 を閉矩形$[0, 1]\times I$ とする．$\varphi: S \to P_1$ を

$$\varphi(x)=(x, \sin(1/x)) \qquad (x \in (0, 1])$$

によって定義する(このとき，$\tilde{f}: [0, 1]\times I \to R^1$ を

$$\tilde{f}(x, y)=y$$

と定義すれば，$\tilde{f}\circ\varphi=f$ である)．P_1 はコンパクトであるが，$\overline{\varphi(S)} \neq P_1$ である．そこで

$$P=\overline{\varphi(S)}=(\varphi(S) \text{ の } P_1 \text{ における閉包})$$

とおけば，$\varphi: S \to P$ となる．これで，P, φ と $\tilde{f}$ の P への制限は必要な性質をもつ．

結局，$(0, 1]$ を $\sin(1/x)$ のグラフ $\varphi(S)$ ($(0, 1]$ と同相)でおきかえたのである．図1.7を見よ．上のおきかえは，関数 f を同相写像 φ^{-1} によって $\varphi(S)$ 上にもってきたことになるが，こうすれば，コンパクト集合

$$(\{0\}\times[-1, 1]) \cup [(x, \sin(1/x))\,;\, x \in (0, 1]]$$

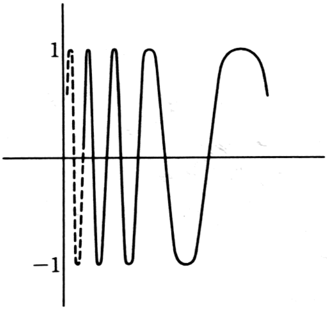


図 1.7

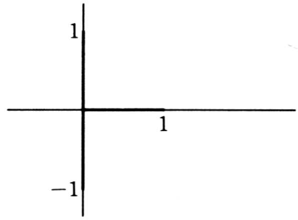


図 1.8

の上まで拡張できたのである．

いまの構成を別な見方で見ることもできる．まず，集合 $\varphi(S)$ を考え，これを同相写像 φ によって S と同一視する．このとき，集合 P は次の集合 $\tilde{P}$（図1.8）と同一視される．

$$\tilde{P}=(\{0\}\times[-1,\ 1])\cup((0,\ 1]\times\{0\})$$

関数 $\tilde{f}$ は $\tilde{P}$ 上の連続関数になり，$(0,\ 1]\times\{0\}$ 上では f と一致する．このとき，$\tilde{P}$ 上の位相は R^2 から導入された位相では“ない”ことに注意しなければならない．$\tilde{P}$ 上の位相は，P 上の位相を $S\to\varphi(S)$ の同一視によって $\tilde{P}$ に写したものである．したがって，たとえば $\{0\}\times[-1,\ 1]$ の各点は集合 $(0,\ 1]\times\{0\}$ の集積点になっている．

例 2 は，次の定理の内容と証明の主要な点をよく示している．定理 2 はチコノフの定理の結果である．

定理 2　W を位相空間 S 上で定義された連続な実数値（あるいは複素数値）関数の族とし，各 $w\in W$ が有界関数であるという性質をもっているとする．すなわち各 $w\in W$ に対して $w(S)\subset I_w$ で，I_w はある有界閉区間（あるいは円板）である．このとき，コンパクト空間 P，連続写像 φ: $S\to P$ と，P 上の連続な実数値（あるいは複素数値）関数の族 $\mathcal{F}$ が存在して，次の条件を満たす．

（1）　$\overline{\varphi(S)}=P$,

（2）　$[f\circ\varphi;\ f\in\mathcal{F}]=W$.

さらに，W が S の点を分離するならば（すなわち，各 $s_1\neq s_2\in S$ に対してある $w\in W$ が存在して，$w(s_1)\neq w(s_2)$ となるならば），φ は単射である．

証明　$P_1=\prod_{w\in W} I_w$ とする．各 I_w はコンパクトであるから，チコノフの定理

によって P_1 もコンパクトである．φ: $S\to P_1$ を

$$\varphi(s)(w)=w(s)$$

と定義すると，φ は連続である．これを示すには，各開集合は開集合の基の元の和集合であるから，基の元である各開集合の逆像が開集合であることをいえばよい．そこで，U を P_1 での開集合の基の元である開集合とする．このとき，ある有限部分集合 $W_1\subset W$ と，各 $w\in W_1$ に対して I_w の中の開集合 V_w が存在して

$$U=\bigcap_{w\in W_1}\pi_w{}^{-1}(V_w)$$

と書ける．したがって

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(U)&=[s\in S;\ \varphi(s)\in\bigcap_{w\in W_1}\pi_w{}^{-1}(V_w)]\\&=[s\in S;\ \text{各 } w\in W_1 \text{ に対して } \varphi(s)(w)\in V_w]\\&=[s\in S;\ \text{各 } w\in W_1 \text{ に対して } w(s)\in V_w]\\&=\bigcap_{w\in W_1}w^{-1}(V_w)\end{aligned}$$

となる．各 w は連続であるから，$\varphi^{-1}(U)$ は有限個の開集合の共通部分である．したがって $\varphi^{-1}(U)$ は開で，φ は連続である．

さて，$P=\overline{\varphi(S)}$ とおく．P はコンパクト空間の閉部分集合であるから，コンパクトである．P に P_1 からの相対位相を入れておけば，φ: $S\to P_1$ が連続であるから，φ: $S\to P$ も連続である．さらに φ の定義より，各 $s\in S$ と各 $w\in W$ に対して，明らかに

$$\pi_w\circ\varphi(s)=w(s).$$

そこで $\mathscr{F}=[\pi_w|_P;\ w\in W]$ とすれば

$$[f\circ\varphi;\ f\in\mathscr{F}]=W.$$

残っていることは，W が点を分離するとき φ が単射であることを証明することである．しかし，各 $s_1\neq s_2\in S$ に対して $w\in W$ が存在して，$w(s_1)\neq w(s_2)$ となるなら，その w に対して

$$\varphi(s_1)(w)=w(s_1)\neq w(s_2)=\varphi(s_2)(w)$$

となり，$\varphi(s_1)\neq\varphi(s_2)$ である．▨

注意 前の例2は，$f_1(x)=\sin(1/x)$，$f_2(x)=x$ として，$W=\{f_1, f_2\}$ とした場合である．関数 f_2 は点を分離させるために加えたのである．

定理 1 の証明 各 $w\in W$ に対して S_w はコンパクトであるとし，$\mathscr{F}$ を $P=\prod_{w\in W}S_w$ の中の閉集合からなるある族で，次の性質をもつものとする．

（i） $\mathscr{F}$ の有限個の元の共通部分は空でない．

Pがコンパクトなことを証明するためには，1.3節の定理3によって，上のような各$\mathcal{F}$に対して$\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F\neq\phi$を示せばよい．

このとき，おのおのの族

$$\mathcal{F}_w=[\overline{\pi_w(F)};\ F\in\mathcal{F}]$$

が性質(i)をもつコンパクト空間S_wの中の閉集合の族(すなわち$\bigcap_{F\in\mathcal{F}}\overline{\pi_w(F)}\neq\phi$である族)であるからといって，単に各$w$に対して$\pi_w(x)\in\bigcap_{F\in\mathcal{F}}\pi_w(F)$となる点$x$を選ぶことによって，$\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F$の中の点を見つけることは期待できない．たとえば，$P$を$R^2$の中の閉矩形として，$\mathcal{F}$を次のような，与えられた2点$P_1=(x_1, y_1)$, $P_2=(x_2, y_2)\in P$を中心とする閉球体の組からなる族とする．

$$F=[(\overline{B_{P_1}(r)}\cup\overline{B_{P_2}(r)})\cap P;\ r\in R^1].$$

このとき，点$P_3=(x_1, y_2)$は，性質

$$\pi_1(P_3)\in\bigcap_{F\in\mathcal{F}}\overline{\pi_1(F)}\qquad と\qquad \pi_2(P_3)\in\bigcap_{F\in\mathcal{F}}\overline{\pi_2(F)}$$

をもつが，$P_3\notin\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F$である．

この事態を救うために，多くの集合を十分加えて$\mathcal{F}$を大きくして，「まずい選択」がおきないようにする．$\Lambda=[\mathcal{G};\ \mathcal{G}$は性質(i)を満たし，かつ$\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$であるような$P$の部分集合の族$]$とする．もちろん$\mathcal{F}\in\Lambda$である．また，$\Lambda$は包含関係によって半順序がつけられる，すなわち$\Lambda\times\Lambda$の中の半順序関係$R$は

$$(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)\in R\Leftrightarrow\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2$$

によって与えられる．このとき$\mathcal{F}\subset\mathcal{F}$であるから，$\{\mathcal{F}\}\subset\Lambda$は1点からなる全順序づけられた$\Lambda$の部分集合である．極大原理(1.1節を見よ)によって，$\{\mathcal{F}\}$を含む全順序づけられた極大集合$\Lambda_1\subset\Lambda$が存在する．$\mathcal{H}=\bigcup_{\mathcal{G}\in\Lambda_1}\mathcal{G}$とすると，$\mathcal{F}\subset\mathcal{H}$である．$\mathcal{H}\in\Lambda_1$であることを示そう．まず$\mathcal{H}\in\Lambda$であることに注意する．すなわち$\mathcal{H}$は性質(i)をもつ．なぜなら，$H_1, \cdots, H_k\in\mathcal{H}$とすると，ある$\mathcal{G}_j\in\Lambda_1$ $(j=1, \cdots, k)$に対して$H_j\in\mathcal{G}_j$である．Λ_1は全順序づけられているから，すべての$j=1, 2, \cdots, k$に対して$\mathcal{G}_j\subset\mathcal{G}_{j_0}$となる$j_0$が存在する．したがってすべての$H_j$は$\mathcal{G}_{j_0}$の元であり，$\mathcal{G}_{j_0}$は性質(i)をもつから$\bigcap_{j=1}^{k}H_j\neq\phi$である．よって$\mathcal{H}\in\Lambda$.

ところが，実は$\mathcal{H}\in\Lambda_1$である．ここで$\mathcal{H}\notin\Lambda_1$としよう．集合$\Lambda_2=\Lambda_1\cup\{\mathcal{H}\}$を考えると，$\Lambda_2$は$\{\mathcal{F}\}$を含み，$\Lambda_1\subsetneqq\Lambda_2$なる$\Lambda$の全順序づけられた部分集合になる．これは$\Lambda_1$の極大性に矛盾する．

$\mathcal{H}$は次の性質をもっていることに注意する．

(ii) $K\subset P$かつすべての$H\in\mathcal{H}$に対して$K\cap H\neq\phi$なら，$K\in\mathcal{H}$である．

もしそうでないとすると，$\mathcal{K}=\mathcal{H}\cup\{K\}$ が性質(i)を満たし[1]，$\mathcal{K}\in\Lambda$ となる．したがって $\Lambda_1\cup\{\mathcal{K}\}$ は Λ_1 を含む全順序づけられた(各 $\mathcal{G}\in\Lambda_1$ に対して $\mathcal{K}\supset\mathcal{G}$) Λ の部分集合となり，Λ_1 の極大性に反する．

さて，各 $w\in W$ に対して

$$\mathcal{H}_w=[\overline{\pi_w(H)}\,;\ H\in\mathcal{H}]$$

とおくと，$\mathcal{H}$ が性質(i)を満たすから，各 $w\in W$ に対して $\mathcal{H}_w$ も性質(i)を満たす S_w の閉集合の族である．各 $w\in W$ に対して S_w のコンパクト性より

$$T_w=\bigcap_{H\in\mathcal{H}}\overline{\pi_w(H)}\neq\phi.$$

選択公理(1.1節を見よ)によって，$\prod_{w\in W}T_w\neq\phi$，すなわち，ある $f\in P$ が存在して，各 $w\in W$ に対して $f(w)\in\bigcap_{H\in\mathcal{H}}\overline{\pi_w(H)}$ となる．

あとは $f\in\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F$ を示すことだけが残っている．これを証明するには，f を含む P の開集合を V として，$V\in\mathcal{H}$ を示せば十分である．なぜなら，すべての $H\in\mathcal{H}$ に対して $V\cap H\neq\phi$ ならば，特にすべての $F\in\mathcal{F}$ に対して $V\cap F\neq\phi$ である．このことが f を含む任意の開集合 V に対していえるということは，$f\in\overline{F}$ を示している．ところが，各 F は閉であるから，$f\in F$ であり $f\in\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F$ がいえ，定理が証明される．

そこで，f を含む開集合を V としよう．V は開集合の基の元の和集合であるから，ある基の元 $\tilde{V}$ が存在して $f\in\tilde{V}\subset V$ である．$\tilde{V}$ は基の元であるから，ある有限部分集合 $W_1\subset W$ と各 $w\in W_1$ に対して S_w の開集合 V_w とがあって

$$\tilde{V}=\bigcap_{w\in W_1}\pi_w^{-1}(V_w)$$

と書ける．$f\in\tilde{V}$ であるから，各 $w\in W_1$ に対して $f(w)=\pi_w(f)\in V_w$ である．さらに，f の選び方から，各 $w\in W_1$ と各 $H\in\mathcal{H}$ に対して $f(w)\in\overline{\pi_w(H)}$ である．すなわち，各 $w\in W_1$ と $H\in\mathcal{H}$ に対して $f(w)\in\pi_w(H)$ か，あるいは $f(w)$ は $\pi_w(H)$ の集積点である．どちらの場合でも，各 $w\in W_1$ と $H\in\mathcal{H}$ に対して $V_w\cap\pi_w(H)\neq\phi$ がいえる．したがって，すべての $w\in W_1$ と $H\in\mathcal{H}$ に対して $\pi_w^{-1}(V_w)\cap H\neq\phi$ となる．性質(ii)によって，各 $w\in W_1$ に対して $\pi_w^{-1}(V_w)\in\mathcal{H}$．そこで，性質(i)によって，各 $H\in\mathcal{H}$ に対して

$$V\cap H\supset\Big(\bigcap_{w\in W_1}\pi_w^{-1}(V_w)\Big)\cap H\neq\phi.$$

再び性質(ii)によって，$V\in\mathcal{H}$． ▮

---

1) [訳注] $\mathcal{K}$ が性質(i)を満たすことは，任意の $H_1,\cdots,H_k\in\mathcal{H}$ に対して，ある $H\in\mathcal{H}$ が存在して $H=H_1\cap\cdots\cap H_k$ となることからわかる．これは，(ii)の証明と同じ議論で証明できる．

2章 (続) 位相空間論

2.1 分離公理

第1章では，開集合が多いか少ないかということがそれほど重要ではない位相的概念を扱った．しかし，普通，応用にでてくる位相空間はほとんどの場合，点を「分離」できるほど，さらには閉集合を「分離」できるほど多くの開集合をもっている．

定義 S を位相空間とする．

S が $\boldsymbol{T_0}$ **空間**であるとは，任意の相異なる点 $s_1, s_2 \in S$ に対して，どちらか一方を含み，もう一方を含まないような S の開集合 U が存在することである．

S が $\boldsymbol{T_1}$ **空間**であるとは，$s_1 \neq s_2$ に対して $s_1 \in U_1$，$s_2 \notin U_1$ となる開集合 U_1 と，$s_2 \in U_2$，$s_1 \notin U_2$ となる開集合 U_2 とが存在することである．

S が $\boldsymbol{T_2}$ **空間**または**ハウスドルフ空間**であるとは，$s_1 \neq s_2$ に対して $s_j \in U_j$ $(j=1, 2)$ で，$U_1 \cap U_2 = \phi$ (すなわち U_1 と U_2 は交わらない) となる開集合 U_j $(j=1, 2)$ が存在することである．

注意 T_2 空間は T_1 空間であり，T_1 空間は T_0 空間である．しかし T_0 空間は必ずしも T_1 空間とは限らない．たとえば

$$S = \{s_1, s_2\} = (2\text{ 点からなる集合})$$

で，S 上の位相を $\mathcal{U} = \{\phi, S, \{s_1\}\}$ としてみよ．

問題 T_1 空間であって T_2 空間ではない例をあげよ．

注意 距離空間はハウスドルフ空間である．$s_1 \neq s_2$ に対して

$$a = \rho(s_1, s_2) > 0$$

とおき，$U_j = B_{s_j}(a/2)$ $(j=1, 2)$ とすればよい．

定理 1 S が T_1 空間であるためには，S の各点に対し，それ1点からなる S の部分集合が閉集合となることが必要かつ十分である．

証明 S を T_1 とする．$F=\{s_0\}$ として F' を考える．仮定より，$s\in F'$ に対して $s_0\notin U_s$ (すなわち $U_s\subset F'$) となる開集合 U_s が存在する．したがって $F'=\bigcup_{s\in F'} U_s$ は開集合である．これより F は閉集合となる．

逆に，S の各点が閉集合であるとする．$U_1=\{s_2\}'$，$U_2=\{s_1\}'$ とすると，$s_1\neq s_2$ ならば $s_j\in U_j$ で U_j ($j=1,2$) は開集合となる． ▓

> **定理 2** S がハウスドルフ空間ならば，S の任意のコンパクト部分集合は閉集合である．

証明 C を S のコンパクト部分集合とする．C' が開集合(すなわち C が閉集合)であることをいうためには，各 $s\notin C$ に対して，s を含み $U_s\cap C=\phi$ である開集合 U_s が存在することをいえばよい．S はハウスドルフだから，各 $c\in C$ に対して，交わらない開集合 U_c, V_c で，$s\in U_c$, $c\in V_c$ となるものが存在する．このとき $\{V_c\cap C\}_{c\in C}$ は C の開被覆である(ただし，これらは相対位相の意味で C の開集合)．C がコンパクトだから有限部分被覆が存在する．すなわち $\bigcup_{c\in C_1}(V_c\cap C)=C$ となる有限な部分集合 $C_1\subset C$ がとれる．したがって $C\subset \bigcup_{c\in C_1} V_c$．次に，$U_s=\bigcap_{c\in C_1} U_c$ とおくと，U_s は開集合で，$s\in U_s$，$U_s\cap C\subset U_s\cap(\bigcup_{c\in C_1} V_c)=\phi$ (なぜなら，もし $t\in U_s\cap(\bigcup_{c\in C_1} V_c)$ と仮定すると，すべての $c\in C_1$ に対して $t\in U_c$ かつ，ある $c_0\in C_1$ に対して $t\in V_{c_0}$．これより $t\in U_{c_0}\cap V_{c_0}=\phi$ で矛盾)． ▓

注意 実は上の証明で「ハウスドルフ空間 S のコンパクト部分集合 C に対して，$s\notin C$ ならば，交わらない開集合 U_1, U_2 で $s\in U_1$，$C\subset U_2$ となるものが存在する」こともいえた．さらに次の事実が成り立つ．

> **定理 3** C_1, C_2 をハウスドルフ空間 S の交わらないコンパクト部分集合とする．このとき交わらない開集合 U_j で $C_j\subset U_j$ ($j=1,2$) となるものが存在する．

証明 上記の注意より，各 $s\in C_1$ に対して交わらない開集合 U_s, V_s で $s\in U_s$, $C_2\subset V_s$ となるものが存在する．$\{U_s\cap C_1\}_{s\in C_1}$ は C_1 の開被覆である．C_1 はコンパクトだから，有限な部分集合 $D_1\subset C_1$ が存在し，$\{U_s\cap C_1\}_{s\in D_1}$ で C_1 を被覆できる．すなわち $C_1\subset \bigcup_{s\in D_1} U_s$．ここで $U_1=\bigcup_{s\in D_1} U_s$, $U_2=\bigcap_{s\in D_1} V_s$ とおけば，$C_2\subset U_2$．また，$U_s\cap V_s=\phi$ から $U_1\cap U_2=\phi$． ▓

> **定理 4** S をコンパクト空間，T をハウスドルフ空間とすると，連続な1対1対応 $f\colon S\to T$ は同相写像である．

証明 $f^{-1}: T \to S$ が連続であることを示せばよい．すなわち，U を S の開集合としたとき，$f(U)=(f^{-1})^{-1}(U)$ が T の開集合となることをいえばよい．補集合を考えて，F を S の閉集合とし，$f(F)$ が T の閉集合であることを示そう．1.3 節の定理 4 より F はコンパクトであり，1.4 節の定理 4 より $f(F)$ はコンパクトである．したがって上の定理 2 から $f(F)$ は T の閉集合となる．▓

例 定理 4 で両方の仮定が必要なことは，次の 2 つの例でわかる．

（1） $S=R^1$ に離散位相を入れ(S はコンパクトではない)，$T=R^1$ に普通の位相を入れた場合，

（2） $S=\{s_1, s_2\}$ に離散位相を入れ(S はコンパクト)，$T=\{s_1, s_2\}$ に位相 $\mathcal{U}=\{\phi, S, \{s_1\}\}$ を入れた場合(T はハウスドルフではない)．

ただし，$f: S \to T$ を，(1)，(2)の場合とも恒等写像とする．

注意 定理 3 をいいかえれば，ハウスドルフ空間にはコンパクト集合を分離するのに十分な開集合がある，ということである．ときには，閉集合を分離する必要も生じるが，それにはより強い公理を必要とする．

定義 位相空間 S が **T_3 空間**または**正則空間**であるとは，

（1） S は T_1 であり，

（2） S の任意の閉集合 F と各 $s \notin F$ に対し，交わらない開集合 U_1, U_2 で，$s \in U_1$，$F \subset U_2$ となるものが存在することをいう．

位相空間 S が **T_4 空間**または**正規空間**であるとは，

（1） S は T_1 であり，

（2） S の交わらない閉集合 F_j の任意の組に対し，交わらない開集合 U_j で，$F_j \subset U_j$ $(j=1, 2)$ となるものが存在することをいう．

注意 $j<k$ ならば，T_k 空間($k=1, \cdots, 4$)は T_j 空間である．

例 ハウスドルフであるが，正則でない空間を構成しよう．$S=[x=(x_1, x_2) \in R^2;\ x_2 \geq 0]$ (すなわち，S は「閉じた」上半平面)とする．基 $\mathcal{B}$ を次のように与え，S 上の位相を定める．R^1 を R^2 の x_1 軸とし，$S_+=S-R^1$ (S_+ は「開いた」上半平面)とする．

$$\mathcal{B}_1=[B_x(r)\,;\ x \in S_+,\ \ r<x_2,\ \ ただし\ x=(x_1, x_2)]$$

$$\mathcal{B}_2=[(B_x(r) \cap S_+) \cup \{x\}\,;\ x \in R^1].$$

ただし，球体 $B_x(r)$ は R^2 上の通常の距離で定義されている．ここで，$\mathcal{B}=\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ とする．$\mathcal{B}$ が S 上の位相の基となることは各自確かめよ．図 2.1 は基 $\mathcal{B}$ の元を表わしている．

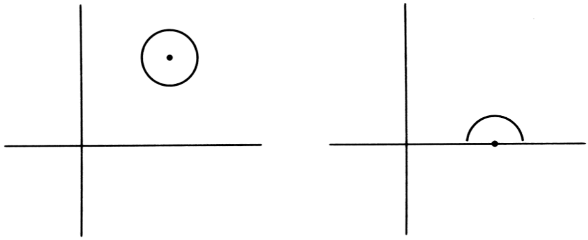


図 2.1

S 上の位相は R^2 上の普通の位相から導かれた位相ではない．容易にわかるように，S は T_2 である．したがって各点は閉．さらに，$R^1-\{0\}$ は S で閉（なぜなら補集合 $S_+\cup\{0\}$ が開）である．しかし，閉集合 $R^1-\{0\}$ と1点0とは，開集合で分離できない．実際，U_1 を開，$0\in U_1$ とすれば，ある実数 r に対して基の元 $(B_0(r)\cap S_+)\cup\{0\}$ が U_1 に含まれ，$(r/2, 0)$ を含む任意の開集合は必ず U_1 と交わる．したがって，S は正則でない(後に，正規でない正則空間の例をあげる)．

注意　コンパクトなハウスドルフ空間は正規である．このことは，定理3と「コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである」ことから直ちに導かれる．

注意　正則空間(あるいは正規空間)の定義において，開集合 U_1, U_2 の境界が交わる(すなわち $\bar{U}_1\cap\bar{U}_2\neq\phi$) ことがあるかもしれない．次の2つの定理(定理5と6)によれば，開集合 U_j をもっとうまくとることが可能である．

> **定理 5**　S を正則位相空間とする．F が S で閉かつ $s\notin F$ のとき，S の開集合 U_1, U_2 で $s\in U_1$，$F\subset U_2$，$\bar{U}_1\cap\bar{U}_2=\phi$ となるものが存在する．

証明　正則性の定義から，交わらない開集合 V_1，V_2 で $s\in V_1$，$F\subset V_2$ となるものが存在する．補集合 V_1' は S で閉であり，$s\notin V_1'$．したがって，S は正則だから交わらない開集合 W_1，W_2 で，$s\in W_1$，$V_1'\subset W_2$ となるものが存在する．$U_1=W_1$，$U_2=V_2$ とおけば $s\in U_1$，$F\subset U_2$．しかも $\bar{U}_1\cap\bar{U}_2=\phi$．実際，

$$\bar{U}_1=\bar{W}_1\subset\overline{W_2'}=W_2'\subset V_1 \qquad \text{かつ} \qquad \bar{U}_2=\bar{V}_2\subset\overline{V_1'}=V_1'$$

したがって $\bar{U}_1\cap\bar{U}_2\subset V_1\cap V_1'=\phi$．■

> **定理 6**　S を正規位相空間とする．F_1, F_2 を S の交わらない閉部分集合とする．このとき，S の開集合 U_1, U_2 で，$F_1\subset U_1$，$F_2\subset U_2$，$\bar{U}_1\cap\bar{U}_2=\phi$ となるものが存在する．

証明　定理5の証明と同様である．

> **定理 7** (S, ρ)を距離空間とする．Sに，ρによってきめられた位相を入れたものは正規である．

証明 Sがハウスドルフであることはすでに示したから，SはT_1である．Sの部分集合Cに対して

$$d_C(s)=\underset{c\in C}{\mathrm{g.l.b.}}\{\rho(s, c)\}$$

で定義された関数$d_C: S\to R^1$を考える．ここで，g.l.b. は「最大下界」を表わす．いま，Sの交わらない閉集合F_1, F_2に対して$d_1=d_{F_1}$, $d_2=d_{F_2}$とし，

$$U_1=[s\in S;\ d_1(s)-d_2(s)<0],\qquad U_2=[s\in S;\ d_1(s)-d_2(s)>0]$$

とおく．このとき$U_1\cap U_2=\phi$. 次に，$F_1\subset U_1$, $F_2\subset U_2$と，U_1, U_2が開であることを示そう．そうすればSが正規であることが証明される．

まず，$s\in F_1$とする．$d_1(s)=0$. $s\in U_1$をいうためには$d_2(s)>0$を示せばよい．そこで$d_2(s)=0$と仮定すると，すべての$\varepsilon>0$に対して$f_2\in B_s(\varepsilon)$となる$f_2\in F_2$が存在する．したがって，$s\in \bar{F}_2=F_2$で，これは$F_1\cap F_2=\phi$であることに矛盾する．よって$F_1\subset U_1$. 同様に$F_2\subset U_2$. U_1とU_2が開であることが残ったが，U_1が開であることをいうためには，各$s_1\in U_1$がU_1に含まれるある球体に含まれることを示せばよい(U_2についても同様である)．$a=d_2(s_1)-d_1(s_1)$とおくと$a>0$. $B_{s_1}(a/3)\subset U_1$を示そう．実際，$s\in B_{s_1}(a/3)$とすると，$\rho(s, s_1)<a/3$. $d_1(s)-d_2(s)<0$を示そう．

$$\begin{aligned}d_1(s)-d_2(s)&=[d_1(s)-d_1(s_1)]+[d_1(s_1)-d_2(s_1)]+[d_2(s_1)-d_2(s)]\\&=[d_1(s)-d_1(s_1)]-a+[d_2(s_1)-d_2(s)]\end{aligned}$$

各$f_1\in F_1$に対しては，

$$\rho(s, f_1)\leq\rho(s, s_1)+\rho(s_1, f_1)<\tfrac{1}{3}a+\rho(s_1, f_1).$$

すべての$f_1\in F_1$を動かした g.l.b. をとれば，

$$d_1(s)\leq\tfrac{1}{3}a+d_1(s_1).\qquad したがって\qquad d_1(s)-d_1(s_1)\leq\tfrac{1}{3}a.$$

同様に，各$f_2\in F_2$に対して，

$$\rho(s_1, f_2)\leq\rho(s_1, s)+\rho(s, f_2)<\tfrac{1}{3}a+\rho(s, f_2).$$

よって

$$d_2(s_1)\leq\tfrac{1}{3}a+d_2(s).\qquad したがって\qquad d_2(s_1)-d_2(s)\leq\tfrac{1}{3}a.$$

以上より

$$d_1(s)-d_2(s)\leq\tfrac{1}{3}a-a+\tfrac{1}{3}a<0$$

となり，$s\in U_1$である．すなわち$B_{s_1}(a/3)\subset U_1$. したがってU_1は開である． ▮

2.2 連続関数による分離

S を ϕ と S のみを開集合としてもつ位相空間とすると，S 上の連続な実数値関数は定値関数のみであることは容易にわかる．一方，S 上に連続な実数値関数 f が存在し，S の相異なる点のすべての組 s_1, s_2 に対して $f(s_1)\neq f(s_2)$ となるなら，S はハウスドルフである(R^1 の交わらない開集合 U_1, U_2 で $f(s_1)\in U_1$, $f(s_2)\in U_2$ なるものをとれば，$s_j\in f^{-1}(U_j)$ $(j=1, 2)$, $f^{-1}(U_1)\cap f^{-1}(U_2)=\phi$ である)．このように，ある空間上に連続な実数値関数が存在するか否かという問題は，その空間が満たす分離公理と関連する．定理1とその注意はこの観点で正規性を特徴づけている．

> **定理 1** (ウリゾーンの補題) A_0, A_1 を正規空間 S の交わらない閉部分集合とする．そのとき連続関数 $f\colon S\to[0, 1]$ で，$f(A_0)=0$ (すなわち，すべての $s\in A_0$ に対して $f(s)=0$)，$f(A_1)=1$ となるものが存在する．

注意 逆に，T_1 空間 S が，交わらない閉集合の各組 A_0, A_1 に対して上記のような関数をもてば，S は正規である．なぜならば：$U_0=f^{-1}([0, 1/2))$，$U_1=f^{-1}((1/2, 1])$ とすると，$A_0\subset U_0$, $A_1\subset U_1$, $U_0\cap U_1=\phi$.

証明 与えられた A_0, A_1 に対して，まずすべての $r=k/2^n$ $(k=1, \cdots, 2^n;\ n=1, 2, \cdots)$ について $f^{-1}([0, r))$ の近似 U_r をつくり，それを用いて f を構成する．

最初に，正規性より，交わらない開集合 $U_{1/2}, V_{1/2}$ で $A_0\subset U_{1/2}$, $A_1\subset V_{1/2}$ であるものが存在する．そのとき，

$$A_0\subset U_{1/2}\subset V_{1/2}'\subset A_1'.$$

次に，交わらない閉集合 $A_0, U_{1/2}'$ を考える．正規性より，交わらない開集合 $U_{1/4}, V_{1/4}$ で，$A_0\subset U_{1/4}$, $U_{1/2}'\subset V_{1/4}$ であるものが存在する．集合 $V_{1/2}'$, A_1 は交わらない閉集合であるから，再び正規性により，交わらない開集合 $U_{3/4}, V_{3/4}$ で $V_{1/2}'\subset U_{3/4}$, $A_1\subset V_{3/4}$ であるものが存在する．ここで

$$A_0\subset U_{1/4}\subset V_{1/4}'\subset U_{1/2}\subset V_{1/2}'\subset U_{3/4}\subset V_{3/4}'\subset A_1'.$$

このようにして，帰納的に各2進小数 $r=k/2^n$ に対して定義された開集合 U_r, V_r が得られ，それらは各 n に対して

$$A_0\subset U_{1/2^n}\subset V_{1/2^n}'\subset U_{2/2^n}\subset V_{2/2^n}'\subset\cdots\subset U_{(2^n-1)/2^n}\subset V_{(2^n-1)/2^n}'\subset A_1'$$

という性質をもつ．特に，$r_1<r_2$ である2進小数の各組 r_1, r_2 に対して

$$U_{r_1}\subset V_{r_1}'\subset U_{r_2}\subset V_{r_2}'.$$

いま，$f\colon S \to [0, 1]$ を

$$f(s)=\begin{cases} \text{g.l.b.}[r;\ s \in U_r] & (s \in \bigcup_r U_r \text{ のとき}) \\ 1 & (s \notin \bigcup_r U_r \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．すべての r に対して $A_0 \subset U_r$ より，$f(A_0)=0$．同様に，すべての r に対して $U_r \subset A_1'$ より，すべての r に対して $U_r \cap A_1=\phi$．よって $f(A_1)=1$．f が連続であることを確かめれば証明が終る．そのためには，$[0, 1]$ の開集合の基 $\mathcal{B}$ をとり，各 $U \in \mathcal{B}$ に対して $f^{-1}(U)$ が開であることを示せば十分である．基として

$$\mathcal{B}=[[0, a),\ (c, d),\ (b, 1]\ ;\ a, b, c, d \text{ は無理数}]$$

をとる．

$(c, d)=[0, d) \cap (c, 1]$，$f^{-1}(c, d)=f^{-1}([0, d)) \cap f^{-1}((c, 1])$ より，$f^{-1}([0, d))$ と $f^{-1}((c, 1])$ がすべての無理数 c, d に対して開であることを示す．

まず，$f^{-1}([0, d))=\bigcup_{r<d} U_r$ である．なぜなら：ある $r_0<d$ に対して $s \in U_{r_0}$ とすると，$f(s) \leq r_0<d$ だから $s \in f^{-1}([0, d))$．逆に，$s \in f^{-1}([0, d))$ とすると，$f(s)<d$ であるから 2 進小数 $r_0<d$ が存在して $s \in U_{r_0} \subset \bigcup_{r<d} U_r$．よって，$f^{-1}([0, d))=\bigcup_{r<d} U_r$．したがって，$f^{-1}([0, d))$ は開である．

同様に，$f^{-1}((c, 1])=\bigcup_{r>c} V_r$ である．なぜなら：ある $r_0>c$ に対して $s \in V_{r_0}$ とすると，$s \notin V_{r_0}'$ だから $s \notin U_{r_0}$．よって $f(s) \geq r_0>c$．逆に，$s \in f^{-1}((c, 1])$ とすると，ある 2 進小数 $r_0>c$ に対して $s \notin U_{r_0}$．2 進小数は $[0, 1]$ で稠密だから $c<r_1<r_0$ である 2 進小数 r_1 が存在する．$s \notin U_{r_0}$ より $s \notin V_{r_1}' \subset U_{r_0}$ がいえる．すなわち，$s \in V_{r_1} \subset \bigcup_{r>c} V_r$．よって，$f^{-1}((c, 1])=\bigcup_{r>c} V_r$．したがって，$f^{-1}((c, 1])$ は開である．▮

> **系** A_0, A_1 を正規空間 S の交わらない閉部分集合とする．そのとき，連続関数 $g\colon S \to [a, b]$ で，$g(A_0)=a$，$g(A_1)=b$ であるものが存在する．

証明 $f\colon S \to [0, 1]$ を定理 1 で与えられた関数とする．$g=h \circ f$ とすればよい．ここで，$h\colon [0, 1] \to [a, b]$ は

$$h(x)=a+(b-a)x \qquad (x \in [0, 1]).\ ▮$$

注意 1 定理 1 は連続写像の拡張という観点から次のようにいいかえることができる．S を正規空間とし，A_0, A_1 を S の交わらない閉部分集合とする．$S_1=A_0 \cup A_1$ とおき，$f\colon S_1 \to [0, 1]$ を $f(A_0)=0$，$f(A_1)=1$ により定義する．このとき，S 全体への f の連続な拡張 g が存在する．

A_0, A_1 は S_1 において開かつ閉である(S が正規であることより開がいえる)[1]．これより関数 f: $S_1 \to [0, 1]$ は連続である．

注意 2　1.6節の定理2もまた拡張定理であった．本質的には,「位相空間 S 上の連続で有界な実数値あるいは複素数値関数の任意の族は，S を含むコンパクト空間上の連続関数の族に拡張できる」という内容であった．

例　任意の $S_1 \subset S$ と f: $S_1 \to T$ に対して，常に f の S への連続な拡張が存在するというわけではない．たとえば S を，円板

$$S=[(x, y) \in R^2;\ x^2+y^2 \leq 1],$$

S_1 を，円周

$$S_1=[(x, y) \in R^2;\ x^2+y^2=1]$$

とする．$T=S_1$, f: $S_1 \to T$ を恒等写像とすると，f の S 全体への拡張 g は存在しない(このことについては，後にさらに進んだ道具を使えるようになってから厳密に証明する)．

なぜ拡張が存在しないかは直観的にわかる．g が連続な拡張であったとして半径 r $(0<r\leq 1)$ の同心円 S_r 上の様子を考えよう．g は連続だから，近い点は近い点に写される．1に近い r に対して S_r の任意の点 s は S_1 上の点 s/r の近くに写されねばならない．s を S_r に沿って動かすと，$g(s)$ は S_1 に沿って動き，g は S_r を S_1 の上へ写すことがわかる．r を小さくしていっても，同じ議論により，すべての $r>0$ に対して g は S_r を S_1 の上へ写さねばならない．ところが十分小さい r に対しては，中心0は，S_r 上のすべての点に近い．これより，$g(0)$ は S_r の像のどの点にも近くなければならない．すなわち，$g(0)$ は S_1 のすべての点に近い．もちろんこれは不可能である．

注意「位相空間の部分集合上で定義された関数が，どんなとき全空間へ拡張できるか」という問題は，トポロジーの基本的な問題の1つである．この問題が，代数的位相幾何学の分野で多くの道具を発展させた．ところで，正規空間上の実数値関数に対しては次のことを証明することができる．

定理 2　(ティーツェの拡張定理)　S_1 を正規空間 S の閉部分集合とし，f: $S_1 \to [-1, 1]$ を連続とする．このとき，f は S 全体への連続な拡張 g をもつ．

証明　$A_1=f^{-1}([1/3, 1])$，$A_{-1}=f^{-1}([-1, -1/3])$ とすると，A_1, A_{-1} は S_1 の交わらない閉部分集合である．S_1 は閉であるから，A_1, A_{-1} は S において

1) [訳注]　S_1 の中では $A_0'=A_1$, $A_1'=A_0$ であるから，このことは正規でなくても成り立つ．

閉である．ウリゾーンの補題(の系)により，連続関数 f_1: $S\to[-1/3,1/3]$ で $f_1(A_{\pm 1})=\pm 1/3$ なるものが存在する．このとき，すべての $s\in S_1$ に対して

$$|f(s)-f_1(s)|\le 2/3.$$

次に，関数 $f-f_1$: $S_1\to[-2/3,2/3]$ を考える．$A_2=(f-f_1)^{-1}([2/9,2/3])$，$A_{-2}=(f-f_1)^{-1}([-2/3,-2/9])$ とすると，A_2, A_{-2} は S の交わらない閉部分集合である．ウリゾーンの補題により，連続関数 f_2: $S\to[-2/9,2/9]$ で，$f_2(A_2)=2/9$，$f_2(A_{-2})=-2/9$ となるものがある．すべての $s\in S_1$ に対して

$$|f(s)-f_1(s)-f_2(s)|\le 4/9.$$

これを帰納的に続けていけば，すべての正の整数 n に対して

$$f_n\colon S\to\left[\frac{-2^{n-1}}{3^n},\ \frac{2^{n-1}}{3^n}\right]$$

かつ，すべての $s\in S_1$ に対して

$$\left|f(s)-\sum_{j=1}^{n}f_j(s)\right|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

を満たす関数 f_n が構成される．

f_n は $|f_n(s)|\le 2^{n-1}/3^n$ なる関数 f_n: $S\to[-1,1]$ とみなすことができる．ワイエルストラスの M 判定法[1] より，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ は連続関数 g: $S\to[-1,1]$ に一様収束する(R^1 上ではよく知られた収束性だが，ここで考えたように，もっと一般的な場合にも成り立つ．各自確かめよ)．すべての $s\in S_1$ に対して

$$|f(s)-g(s)|=\lim_{n\to\infty}\left|f(s)-\sum_{j=1}^{n}f_j(s)\right|\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

が成り立つから，S_1 において $g(s)=f(s)$ である．▮

2.3 (続)分離性

定義 位相空間 S が**局所コンパクト**であるとは，各 $s\in S$ に対して，$s\in U_s$ で $\bar{U}_s$ がコンパクトであるような開集合 U_s が存在することをいう．

注意 局所コンパクトな空間の有限個の積は局所コンパクトである．なぜならば，

$$s=(s_1,\cdots,s_k)\in\underbrace{S_1\times\cdots\times S_k}_{(k\text{ 個の積})}$$

とすると，$s_j\in U_j$ で $\bar{U}_j$ がコンパクトである開集合 $U_j\subset S_j$ $(j=1,\cdots,k)$ が存在する．

1) ［訳注］ 一松信著「解析学序説(下)」(裳華房)，p. 49，定理 10.3 参照．そこでは，M 判定法をワイエルストラスの定理といっている．

これより，$s\in U_1\times\cdots\times U_k$ で $\overline{U_1\times\cdots\times U_k}=\bar{U}_1\times\cdots\times\bar{U}_k$ はコンパクト．無限個の積の場合には，$\prod_{w\in W}U_w$ (U_w は S_w において開)なる形の集合は，一般には $\prod_{w\in W}S_w$ において開ではない．したがって，上の議論はこの場合には成り立たない．

定義 S を T_1 空間とする．∞ を S の中にない点とする．S の **1 点コンパクト化**とは，次のようにして得られる位相空間 $\tilde{S}$ のことである．すなわち，点集合としては $\tilde{S}=S\cup\{\infty\}$．$\mathcal{U}_S$ を S 上の位相，また

$$\mathcal{V}=[V\subset\tilde{S};\ V' \text{ は } S \text{ のコンパクト閉部分集合}]$$
$$=[\tilde{S}-F;\ F \text{ は } S \text{ においてコンパクトかつ閉}]$$

としたとき，$\tilde{S}$ 上の位相の基を次式で与える．

$$\mathcal{B}_{\tilde{S}}=\mathcal{U}_S\cup\mathcal{V}.$$

問題 $\mathcal{B}_{\tilde{S}}$ が実際に $\tilde{S}$ の位相の基であることを確かめよ．また，$\tilde{S}$ の部分集合としての S 上の相対位相は，S 上のもとの位相と同じであることに注意せよ．

例 1 $S=R^1$ とする．このとき $\tilde{S}=R^1\cup\{\infty\}$ で，∞ のまわりの開集合は R^1 のコンパクト部分集合の補集合である．特に，∞ を含む開集合 U に対して実数 $M_U>0$ が存在し，$|x|>|M_U|$ ならば $x\in U$ となる．$\tilde{S}$ は円周 S^1 に同相である．

問題 例 1 の最後に述べたことはなぜ成り立つか．

例 2 $S=R^2$ とする．このとき $\tilde{S}=R^2\cup\{\infty\}$ で，∞ のまわりの開集合は R^2 のコンパクト集合の補集合である．特に，∞ を含む各開集合はある十分大きな球体の外部のすべての点を含む．$\tilde{S}$ は 2 次元球面 S^2 に同相である．実際，同相写像 φ: $S^2\to\tilde{S}$ が立体射影(図 2.2)により与えられる．球面が xy 平面上に南極を原点にしておかれているとしよう．点 $s\in S^2$ に対して，S^2 の北極と

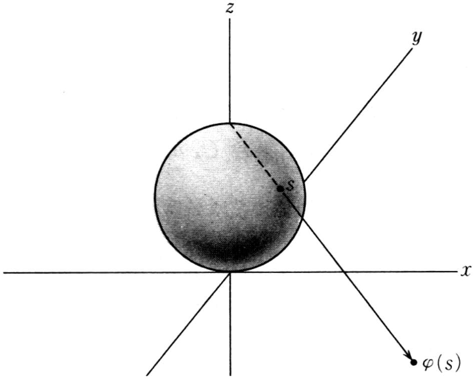


図 2.2

s を結ぶ直線の xy 平面(R^2)との交わりを $\varphi(s)$ とする．φ は $S^2-\{$北極$\}$ から R^2 の上への1対1写像である．さらに，北極の φ による像を ∞ とおく．この φ が同相写像であることは容易にわかる．

例 3 $S=R^n$ とする．$\tilde{S}$ は n 次元球面 S^n に同相である．同相写像は例2のように立体射影で得られる．

注意 S がコンパクトならば，$\{\infty\}$ は $\tilde{S}$ において開である．この場合1点コンパクト化はあまり意味がない．

> **定理 1** S を T_1 空間とする．S の1点コンパクト化 $\tilde{S}$ はコンパクトかつ T_1 である．また，$\tilde{S}$ がハウスドルフであるのは，S がハウスドルフかつ局所コンパクトであるときで，かつそのときに限る．

証明 $\tilde{S}$ が T_1 であること：$s_1, s_2 \in S$ とすれば，T_1 の条件を満たす S の開集合 U_1, U_2 が存在し，U_1, U_2 は $\tilde{S}$ においても開である．$s_1 \in S$, $s_2=\infty$ のときは，$U_1=S$, $U_2=\{s_1\}'$ とする．U_1 は S において開だから $\tilde{S}$ においても開であり，U_2 はコンパクト閉集合 $\{s_1\}$ (S が T_1 より $\{s_1\}$ は閉)の補集合だから $\tilde{S}$ において開である．明らかに $s_1 \in U_1$, $s_1 \notin U_2$, $s_2 \in U_2$, $s_2 \notin U_1$．したがって $\tilde{S}$ は T_1 である．

$\tilde{S}$ がコンパクトであること：$\{U_w\}_{w\in W}$ を $\tilde{S}$ の開被覆とする．このとき，ある $w_0 \in W$ に対して $\infty \in U_{w_0}$．このとき U_{w_0}' は S においてコンパクトである．なぜなら：$U_{w_0}=\bigcup_{V\in\mathcal{B}_1} V$．ただし $\mathcal{B}_1$ は $\tilde{S}$ の位相に対する基 $\mathcal{B}_{\tilde{S}}$ のある部分集合である．$\infty \in U_{w_0}$ だから，$\mathcal{B}_1$ の少なくとも1つの元は，S のあるコンパクト閉部分集合 F に対して F' の形をしている．したがって

$$U_{w_0}'=\bigcap_{V\in\mathcal{B}_1} V'\subset F.$$

すなわち，U_{w_0}' はコンパクト集合 F の閉部分集合である．よって，U_{w_0}' は S においてコンパクトである．

$\{U_w\}_{w\in W}$ は $\tilde{S}$ を被覆するから，$\{U_w\cap U_{w_0}'\}_{w\in W-\{w_0\}}$ は U_{w_0}' の開集合による U_{w_0}' の被覆である．また U_{w_0}' がコンパクトであるから，有限個の部分被覆 $\{U_{w_1}\cap U_{w_0}', \cdots, U_{w_k}\cap U_{w_0}'\}$ が存在する．これより $U_{w_0}, U_{w_1}, \cdots, U_{w_k}$ は $\tilde{S}$ を被覆する．したがって $\tilde{S}$ はコンパクトである．

定理の後半を証明するために，まず $\tilde{S}$ がハウスドルフであると仮定して S がハウスドルフかつ局所コンパクトであることを導こう．S はたしかにハウスドルフである．なぜなら，ハウスドルフ空間の任意の部分集合は相対位相でハウスドルフだからである．S が局所コンパクトであることは次のようにわ

かる．まず各 $s\in S$ に対して $s\in U_1$, $\infty\in U_2$ である交わらない開集合 U_1, U_2 が存在する($\tilde{S}$ がハウスドルフ)．さて U_2' はコンパクト(U_{w_0}' がコンパクトであることを示した前半の議論によって)，かつ $\bar{U}_1\subset\bar{U}_2'=U_2'$ だから，**1.3** 節の定理 **4** より $\bar{U}_1$ はコンパクトである．

逆に，S がハウスドルフかつ局所コンパクトであると仮定する．$s_1, s_2\in\tilde{S}$ とする．$s_1, s_2\in S$ の場合には，$s_1\in U_1$, $s_2\in U_2$ である交わらない開集合 U_1, U_2 が存在する．ところが，U_1, U_2 は $\tilde{S}$ においても開集合だから s_1, s_2 は $\tilde{S}$ において分離される．$s_1\in S$, $s_2=\infty$ のときは，S が局所コンパクトだから S の開集合 U が存在し，$s_1\in U$ かつ $\bar{U}$ はコンパクト(したがって閉)となる．このとき $V=(\bar{U})'$ は $\tilde{S}$ において開，また $s_1\in U$, $s_2\in V$, $U\cap V=\phi$. したがって $\tilde{S}$ はハウスドルフである．▓

定義　位相空間 S が**完全正則空間**であるとは，

（1）S が T_1 であり，

（2）任意の $s\in S$ と，$s\notin C$ である任意の閉集合 C に対して，$f(s)=0$, $f(C)=1$ を満たす連続関数 f: $S\to[0, 1]$ が存在することである．

注意　正規空間は完全正則である(ウリゾーンの補題より)．また，完全正則空間は正則である．後者を示そう．C が完全正則空間 S で閉で，$s\notin C$ とする．このとき

$$U_1=f^{-1}([0, 1/2)),\qquad U_2=f^{-1}((1/2, 1])$$

は s と C を分離する．ただし f は $f(s)=0$, $f(C)=1$ なる関数である．

定理 2　完全正則空間のすべての部分集合は(相対位相で)完全正則である．

証明　明らかに T_1 空間のすべての部分集合は T_1 である．$T\subset S$ とする．C は T で閉で，$t\in T$, $t\notin C$ とする．このとき S のある閉集合 F に対して，$C=T\cap F$. また，$t\notin C=T\cap F$ だから $t\notin F$. S が完全正則であることより，$f(t)=0$, $f(F)=1$ なる連続関数 f: $S\to[0, 1]$ が存在する．f を T に制限したものは連続で，求める条件を満たす．▓

定理 3　局所コンパクトなハウスドルフ空間は完全正則である．

証明　S を局所コンパクトかつハウスドルフとする．このとき，S の **1** 点コンパクト化 $\tilde{S}$ は定理 **1** よりコンパクトかつハウスドルフである．したがって正規である．特に $\tilde{S}$ は完全正則であるから定理 **2** より S も完全正則となる．▓

注意 以上から位相空間のある分離性が，他の分離性を導くことがわかった．このことを図式でまとめると次のようになる．

コンパクト・ハウスドルフ $\Longrightarrow$ 局所コンパクト・ハウスドルフ

$\Searrow$ $\swarrow$

正規 $\Longrightarrow$ 完全正則 $\Longrightarrow$ 正則 $\Longrightarrow$ ハウスドルフ $\Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$

$\nearrow$

距離空間

定理2より完全正則空間のすべての部分集合は完全正則である．コンパクト空間の任意の積はコンパクトであり(チコノフの定理)，またハウスドルフ空間の任意の積はハウスドルフである．したがって閉区間の任意の積は，コンパクトかつハウスドルフであるから完全正則である．かくして，閉区間の任意の積のすべての部分集合は完全正則となる．下の定理4は，すべての完全正則空間はこのような部分集合とみなせることを示している．

定理 4 完全正則空間は閉区間の積のある部分集合に同相である．

証明 1.6節の定理2の証明と同じように考える．Sを完全正則とする．Wを，Sを閉区間$[0, 1]$の中へ写す連続関数全体の集合とする．各$w \in W$に対して$I_w=[0, 1]$とすれば$\{I_w\}_{w \in W}$は閉区間の集まりである．$P=\prod_{w \in W} I_w$とおき，$\varphi\colon S \to P$を

$$\varphi(s)(w)=w(s) \qquad (w \in W)$$

により定義する．ここでφが$\varphi(S)$の上への同相写像であることを示そう．

すでに1.6節の定理2の証明で示したように，φは連続かつ1対1である．(Sが完全正則だから，Wは点と閉集合を分離することに注意せよ．特に点は閉だからWは点を分離する．) したがって，φ^{-1}が連続であること，すなわち，φがSの開集合を$\varphi(S)$の開集合の上へ写すことのみを確かめればよい．

UをSにおいて開であるとする．各$s \in U$に対して，$\varphi(s) \in V \subset \varphi(U)$なる$\varphi(S)$の開集合$V$が存在することを示せば十分である．そうすれば，$\varphi(U)$はこれらの開集合の和集合となるからである．そこで$s \in U$と仮定する．$S$の完全正則性から，$w(s)=0$，$w(U')=1$なる$w \in W$が存在する．このとき$\pi_w^{-1}([0, 1))$は$P$において開である．ただし$\pi_w\colon P \to I_w$を射影とする．$V=\pi_w^{-1}([0, 1)) \cap \varphi(S)$とおくと，$V$は$\varphi(S)$において開である．$\pi_w(\varphi(s))=\varphi(s)(w)=w(s)=0$より$\varphi(s) \in V$．さらに，$V \subset \varphi(U)$．実際$f \in V$なら，ある$t \in S$に対して$f=\varphi(t)$かつ$\pi_w(f) \in [0, 1)$．すなわち$1>\pi_w(f)=\pi_w(\varphi(t))=\varphi(t)(w)=$

$w(t)$．したがって，$t \in w^{-1}([0,1)) \subset U$ となり $f=\varphi(t) \in \varphi(U)$．∎

注意　最初に位相空間を定義したときを思い出してみると，その定義はすでによく知られた空間すなわち距離空間の性質から導いたのであった．逆に，定理 4 は完全正則性の仮定のもとではよく知られた空間に戻れることを示している．閉区間についてはよくわかっているし，空間の積をとるということも感じでよくわかる．いま，完全正則性の公理を満たすすべての位相空間が，閉区間の積の部分集合であることがわかった．しかしながら，定理 5 で示すように，まだ距離空間の世界にまで戻ってはいない．

定義　位相空間 S が**第 1 可算**であるとは，各 $s \in S$ に対して s を含む開集合の可算個の集まり $\{U_s(n)\}_{n \in \{\text{正整数全体}\}}$ が存在し，U が s を含む任意の開集合ならば，$U_s(n) \subset U$ となる n が存在することをいう．

注意　(S, ρ) を距離空間とする．このとき，球体 $\{B_s(1/n)\}$ が上の条件を満たすので，S は第 1 可算である．

> **定理 5**　各実数 r に対して $I_r=[0,1]$，$P=\prod_{r \in R} I_r$ とする．このとき P は第 1 可算ではない．特に P は距離づけ可能でない(すなわち，P 上にいかなる距離 ρ をとっても，その距離による位相が P 上の積位相に一致しない)．

証明　すべての $r \in R^1$ に対して $p(r)=0$ となるような $p \in P$ をとる．p を含む可算個の開集合の集まり $\{V_n\}$ があり，p を含む各開集合 U に対してある n が存在し，$V_n \subset U$ となると仮定する．この仮定から矛盾を導き，P が第 1 可算ではないことを証明する．

さて，各 V_n は P の中で開であるから，$p \in \tilde{V}_n$ なる基の元 $\tilde{V}_n$ を含む．特に，p を含む各開集合 U に対して $\tilde{V}_n \subset U$ となる n が存在する．ところが各 n に対して次のような R^1 の有限部分集合 F_n がとれる．

$$\tilde{V}_n=\prod_{r \in R^1} T_{n,r}, \qquad \text{ただし}\ T_{n,r}=\begin{cases} I_r & (r \notin F_n) \\ U_{n,r} & (r \in F_n) \end{cases}$$

で，各 $r \in F_n$ に対して $U_{n,r}$ は I_r の開集合．$C=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ とおく．このとき，C は有限集合の可算和であるから可算である．特に $C \neq R^1$ より，$r_0 \in R^1-C$ が存在し，各 n に対して $T_{n,r_0}=I_{r_0}$．すなわち各 $\tilde{V}_n$ において r_0 座標は必ず全区間をとる．したがって，$U_{r_0} \subsetneqq I_{r_0}$ をとり，

$$U=\prod_{r \in R^1} S_r, \qquad S_r=\begin{cases} I_r & (r \neq r_0) \\ U_{r_0} & (r=r_0) \end{cases}$$

とすると，U は P の中で開であるにもかかわらずいかなる $\tilde{V}_n$ も含まない．∎

2.4　完備距離空間

定義　(S, ρ) を距離空間とする．S の点列 $\{s_n\}$ が**収束する**とは，ある $s \in S$ が存在し，$\lim_{n\to\infty} \rho(s_n, s)=0$ となることであった．$\{s_n\}$ が**コーシー列**であるとは，$\lim_{m,n\to\infty} \rho(s_n, s_m)=0$ となることをいい，すべてのコーシー列が収束するとき，S は**完備距離空間**であるという．

(S_1, ρ_1), (S_2, ρ_2) を 2 つの距離空間とする．S_1 から S_2 の中への**等長埋めこみ** f とは，すべての $s, t \in S_1$ に対して $\rho_2(f(s), f(t))=\rho_1(s, t)$ となる写像 f: $S_1 \to S_2$ のことである．特に，f: $S_1 \to S_2$ が等長埋めこみならば，f は S_1 を $f(S_1)$ の上へ同相に写す．ただし，S_1, S_2 には距離による位相が与えられているとする．任意の距離空間 (S, ρ) に対して，(S, ρ) から完備距離空間の中への等長埋めこみ f が存在する．このとき，$f(S)$ が稠密ならば，f は (S, ρ) の**完備化**とよばれる．

注意　これまでの概念と違って，完備性は位相的な概念ではない．すなわち，同相写像のもとで不変ではない．たとえば，$S_1=(-\pi/2, \pi/2)$，$S_2=R^1$ とすると，S_1 と S_2 は通常の意味で距離空間である．S_2 は完備であるが S_1 はそうではない．しかしながら $f(s)=\tan s$ により与えられる同相写像 f: $S_1 \to S_2$ が存在する．

これまで一般位相空間のコンパクト性を論じてきたが，距離空間の場合に限って考えると，空間がコンパクトであることをいい表わすいくつかの同値な方法がある．

定理 1　S を距離空間とする．S についての次の 4 つの条件は同値である．

(1)　S はコンパクトである．(ハイネ-ボレルの性質)

(2)　S は可算コンパクトである．すなわち S の任意の無限集合は集積点をもつ．(ボルツァノ-ワイエルストラスの性質)

(3)　S は点列コンパクトである．すなわち S の任意の点列は収束する部分点列をもつ．

(4)　S は完備かつ全有界である．すなわち，S は完備でかつ任意の実数 $\varepsilon>0$ に対して，有限個の半径 ε の球体 $B_{s_1}(\varepsilon), \cdots, B_{s_m}(\varepsilon)$ が存在して S を被覆する．すなわち，$S=\bigcup_{j=1}^{m} B_{s_j}(\varepsilon)$．

証明　(1)$\Longrightarrow$(2) は 1.3 節の定理 5 より証明される．

(2)$\Longrightarrow$(3)　$\{s_n\}$ を S の任意の点列とする．無限個の s_n が等しいなら，それらは収束する部分点列をなす．そこで，$\{s_n\}$ において無限個の相異なるものが

存在すると仮定する. (2)より, この無限集合は集積点 $s_0 \in S$ をもつ. 球体 $B_{s_0}(1)$ を考える. s_0 は $\{s_n\}$ の集積点だから, ある n_1 に対して $s_{n_1} \in B_{s_0}(1)$ である. 次に $B_{s_0}(1/2)$ を考える. このとき s_0 は $\{s_n\}$ の集積点だから, ある $n_2 > n_1$ に対して, $s_{n_2} \in B_{s_0}(1/2)$ である. これを帰納的に続けて, $s_{n_j} \in B_{s_0}(1/2^{j-1})$ ($j = 1, 2, \cdots$) なる点列 $s_{n_1}, s_{n_2}, \cdots$ を得る.

$$\lim_{j\to\infty} \rho(s_{n_j}, s_0) \leq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = 0$$

より, この部分点列は s_0 に収束する.

(3)⟹(4)　まず, S が完備であることを証明する. $\{s_n\}$ がコーシー列ならば, (3) よりある点 s_0 に収束する部分列 $\{s_{n_k}\}$ が存在する. s_n は, この s_0 に収束する. なぜなら

$$|s_n - s_0| \leq |s_n - s_{n_k}| + |s_{n_k} - s_0| \to 0 \qquad (n, n_k \to \infty \text{ のとき}).$$

さらに, S は全有界であることもわかる. 以下背理法で証明する. 結論を否定すると, ある $\varepsilon > 0$ をとって, 半径 ε の球体のいかなる有限個の集まりも S を被覆しないようにできる. $s_1 \in S$ とする. このとき $B_{s_1}(\varepsilon) \neq S$. したがって, $s_2 \notin B_{s_1}(\varepsilon)$ なる s_2, すなわち, $\rho(s_1, s_2) \geq \varepsilon$ なる s_2 が存在する. さて $B_{s_1}(\varepsilon) \cup B_{s_2}(\varepsilon) \neq S$ だから, $s_3 \notin B_{s_1}(\varepsilon) \cup B_{s_2}(\varepsilon)$ なる s_3 が存在する. 当然, $m \neq n$, $\{m, n\} \subset \{1, 2, 3\}$ ならば $\rho(s_m, s_n) \geq \varepsilon$. 帰納的に続けることにより, すべての m, n $(m \neq n)$ に対し $\rho(s_m, s_n) \geq \varepsilon$ となる点列 $\{s_n\}$ を得る. (3)より収束する部分点列 $\{s_{n_j}\}$ が存在する. $s_0 = \lim_{j\to\infty} s_{n_j}$ とおく. このとき $j > j_0$ に対し $s_{n_j} \in B_{s_0}(\varepsilon/2)$ となる j_0 が存在する. これより $j_1, j_2 > j_0$ かつ $j_1 \neq j_2$ に対して

$$\rho(s_{n_{j_1}}, s_{n_{j_2}}) \leq \rho(s_{n_{j_1}}, s_0) + \rho(s_0, s_{n_{j_2}}) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

ところが $n_{j_1} \neq n_{j_2}$ より $\rho(s_{n_{j_1}}, s_{n_{j_2}}) \geq \varepsilon$ である. この矛盾より(4)がいえた.

(4)⟹(1)　次の 2 段階に分けて証明する.

(a)　(4)⟹(3),　　(b)　(4)+(3)⟹(1)

(a)　$\{s_n\}$ を点列とする. (4)より, S を被覆する半径 1 の有限個の球体 $B_{1,1}, \cdots, B_{1,k_1}$ が存在する. これより, ある j_1 に対して, 正整数からなる無限集合 J_1 が存在して, $n \in J_1$ ならば $s_n \in B_{1,j_1}$ であるようにできる. n_1 を $s_{n_1} \in B_{1,j_1}$ である最初の整数とする.

さて, 再び(4)より S を被覆する半径 1/2 の有限個の球体 $B_{2,1}, \cdots, B_{2,k_2}$ が存在する. これより, ある j_2 に対して, $n \in J_2$ ならば $s_n \in B_{2,j_2}$ であるような J_1 の無限部分集合 J_2 が存在する. n_2 を $n_2 > n_1$, $s_{n_2} \in B_{2,j_2}$ であるような最初の整数とする. 以下同様にして, すべての $l \geq k$ に対して $s_{n_l} \in B_{k,j_k}$ (半径 $1/k$

の球体)である部分点列 $\{s_{n_k}\}$ を得る．このとき，$l, m \geq k$ に対して

$$\rho(s_{n_l}, s_{n_m}) < 2/k$$

であるから，$\{s_{n_k}\}$ はコーシー列である．S は完備だから $\{s_{n_k}\}$ は収束する．

(b) $\mathcal{U}$ を S の開被覆とする．コンパクト性を証明するためには，ある正整数 n に対して半径 $1/n$ の各球体がある $V \in \mathcal{U}$ に含まれることを示せば十分である．というのは：全有界性より S を被覆する半径 $1/n$ の有限個の球体 $B_1, \cdots, B_k$ が存在する．ところが，各 j に対して $B_j \subset V_j$ なる $V_j \in \mathcal{U}$ が存在し，$S = \bigcup_{j=1}^{k} B_j \subset \bigcup_{j=1}^{k} V_j$ より $V_1, \cdots, V_k$ は S の有限部分被覆である．

各 n に対してどんな $V \in \mathcal{U}$ にも含まれない半径 $1/n$ の球体 $B_{s_n}(1/n)$ が存在したと仮定する．この仮定より矛盾が導けることを示せば定理が証明される．さて，これらの球体の中心からなる点列 $\{s_n\}$ は，(3)より収束する部分点列 $\{s_{n_k}\}$ をもつ．$s_0 = \lim_{k \to \infty} s_{n_k}$ とする．このとき，ある $V_0 \in \mathcal{U}$ に対して $s_0 \in V_0$．V_0 は開だから $B_{s_0}(r) \subset V_0$ である $r > 0$ が存在する．また，$s_{n_k} \to s_0$ だから，すべての $k \geq k_0$ に対して $s_{n_k} \in B_{s_0}(r/2)$ であるような k_0 が存在する．$1/n_l < r/2$ である $l \geq k_0$ をとる．このとき $B_{s_{n_l}}(1/n_l) \subset B_{s_0}(r) \subset V_0$．ところがこれは矛盾である．▩

注意 定理1の条件(4)は，完備距離空間がコンパクトであることは，与えられた任意の $\varepsilon > 0$ に対して S の中に有限個の点の集合が存在し，S の各点がこれらの点と ε 以内にあることと同値であることを示している．

定理 2 (S, ρ) を完備距離空間とする．$\{U_n\}$ を S で稠密な開集合の可算個の集まりとする．すなわち，

$$\bar{U}_n = S \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

このとき $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \phi$ である[1]．

証明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ の1点に収束する点列を構成しよう．$s_1 \in U_1$ をとる．U_1 は開集合だから，ある r_1 に対して球体 $B_{s_1}(r_1) \subset U_1$ が存在する．$s_1 \in S = \bar{U}_2$ より $B_{s_1}(r_1) \cap U_2 \neq \phi$．次に $s_2 \in B_{s_1}(r_1) \cap U_2$ をとる．r_2 を $B_{s_2}(r_2) \subset B_{s_1}(r_1) \cap U_2$ で $r_2 < \min\{r_1/2, r_1 - \rho(s_1, s_2)\}$ とする．$s \in \overline{B_{s_2}(r_2)}$ ならば

$$\rho(s, s_1) \leq \rho(s, s_2) + \rho(s_2, s_1) \leq r_2 + \rho(s_1, s_2) < r_1.$$

---

1) [訳注] $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ が稠密であることもいえる．U を任意の開集合とし，$V_1 = U$, $V_{n+1} = U_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおけば，以下の証明と同様にして $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \phi$ が，したがって，$U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \phi$ がいえるからである．

よって，$\overline{B_{s_2}(r_2)} \subset B_{s_1}(r_1)$．以下同様にして，$S$ の点列 $\{s_n\}$ と，各 s_n について

$$r_n < \frac{r_1}{2^{n-1}} \qquad \text{かつ} \qquad \overline{B_{s_{n+1}}(r_{n+1})} \subset B_{s_n}(r_n) \subset U_n$$

である球体 $B_{s_n}(r_n)$ が得られる．

$\{s_n\}$ がコーシー列であることを示そう．与えられた $\varepsilon>0$ に対して $r_{n_0}<\varepsilon/2$ である n_0 を選ぶ．すべての $n \geq n_0$ に対して $s_n \in B_{s_n}(r_n) \subset B_{s_{n_0}}(r_{n_0})$ だから，すべての $m, n \geq n_0$ に対して

$$\rho(s_m, s_n) \leq \rho(s_m, s_{n_0}) + \rho(s_{n_0}, s_n) < r_{n_0} + r_{n_0} < \varepsilon$$

である．S は完備であるから $\{s_n\}$ はある点 s_0 に収束する．

最後にすべての n に対して $s_0 \in U_n$ であることを確かめねばならない．ところが，任意の n に対して $s_{n+k} \in B_{s_{n+1}}(r_{n+1})$ がすべての $k \geq 1$ についていえる．$s_0 = \lim_{k\to\infty} s_{n+k}$ であるから

$$s_0 \in \overline{B_{s_{n+1}}(r_{n+1})} \subset B_{s_n}(r_n) \subset U_n. \quad ▉$$

定理 2 を，多少異なった形で述べたものは，解析学に多く応用されている．この定理をもっと標準的な形に書き直そう．

定義　S を位相空間とする．S の部分集合 T が**全疎**であるとは，$\bar{T}$ が空集合以外の開集合を含まないことである．

注意　$T \subset S$ が全疎であるための必要十分条件は，$(\bar{T})'$ が S で稠密であることである．

定義　位相空間 S の部分集合 T が**第 1 類**であるとは，T が全疎集合の可算個の和集合であることである．第 1 類でないとき，T は**第 2 類**であるという．

> **定理 2 の系**　（ベールのカテゴリー定理）　完備距離空間は第 2 類である．すなわち，全疎集合の可算個の和集合では表わせない．

証明　(S, ρ) を完備距離空間とする．$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ とする．ただし各 T_n は全疎集合．このとき $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n$ である．補集合をとれば，$\phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bar{T}_n)'$ である．ところで各 $(\bar{T}_n)'$ は開で，また上の注意より稠密でもある．これは定理 2 に矛盾する．▉

問題　定理 2 とその系は「完備距離空間」を「コンパクトなハウスドルフ空間」とおきかえてもまた正しい．証明してみよ．

2.5 応　用

定義　**線形ノルム空間**とは，実数体あるいは複素数体上の線形空間(ベクトル空間) L で，すべてのベクトル a, b と，すべてのスカラー λ に対して，次の条件を満足する L 上の実数値関数($\|\ \|$ と表わすことにし，$\|a\|$ を a の**ノルム**という)をもつものである．

（1）　$\|a\|\geq 0$，かつ $\|a\|=0 \Leftrightarrow a=0$,

（2）　$\|\lambda a\|=|\lambda|\ \|a\|$,

（3）　$\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|$.

注意　$(L, \|\ \|)$ を線形ノルム空間とする．L 上の距離を

$$\rho(a, b)=\|a-b\|$$

によって定義すれば (L, ρ) は距離空間である．なぜならば

（1）　$\rho(a, b)=0 \Leftrightarrow \|a-b\|=0 \Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$,

（2）　$\rho(a, b)=\|a-b\|=|-1|\ \|a-b\|=\|b-a\|=\rho(b, a)$,

（3）　$\rho(a, c)=\|a-c\|=\|a-b+b-c\|\leq\|a-b\|+\|b-c\|=\rho(a, b)+\rho(a, c)$.

定義　線形ノルム空間 L が**バナッハ空間**であるとは，(L, ρ) が「完備」距離空間であることである．

注意　L の中の点列 a_n は

$$\lim_{n, m\to\infty}\rho(a_n, a_m)=0 \qquad \text{すなわち} \qquad \lim_{n, m\to\infty}\|a_n-a_m\|=0$$

のときコーシー列である．

例　$L=C([0, 1])$ を $[0, 1]$ 上の連続な実数値関数全体からなる空間とする．$f\in L$ に対して $\|f\|=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$ と定義する．このとき L はバナッハ空間である．この $\|\ \|$ がノルムであることは容易にわかる．また，(L, ρ) が完備距離空間であることは，連続関数の一様収束列は連続関数に収束するという定理からいえる．

注意　もっと一般に，S がコンパクト・ハウスドルフ空間ならば，S 上の連続な実数値関数全体からなる集合はバナッハ空間である．ただし，$\|f\|=\max_{s\in S}|f(s)|$ とする．

> **定理 1**　$[0, 1]$ のどの点においても微分できない連続な実数値関数 $f\in C([0, 1])$ が存在する．

証明　任意の正整数 n に対して

$$C_n=[f\in C([0,1])\,;\,\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|\leq n \text{ がある } t \text{ と } t+h\in[0,1]$$
$$\text{なるすべての } h \text{ に対して成り立つ}]$$

とする．各 n に対して C_n が全疎であることを示そう．$C([0,1])$ は完備距離空間だから第2類である．よって，上のことがいえれば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \neq C([0,1])$$

すなわち，任意の n に対して $f\notin C_n$ であるような関数 $f\in C([0,1])$ が存在する．この f が求める関数である．実際 $f\notin C_n$ ということはすべての $t\in[0,1]$ と，ある h (t と n によって定まる)に対して

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|>n$$

を意味する．各 t を固定すると，$n\to\infty$ のとき $h\to 0$ である（$\varepsilon>0$ を与えると，$|h|\geq\varepsilon$ に対して平均変化率 $|(f(t+h)-f(t))/h|$ は h の関数として有界であるから）．したがって，

$$\limsup_{h\to 0}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|=\infty$$

であり，どの $t\in[0,1]$ に対しても f は微分できない．

C_n が全疎であることを証明するには，$\overline{C}_n$ が空集合以外の開集合を含まないことを示せばよい．まず C_n が閉であること，すなわち $C_n=\overline{C}_n$ を示す．$C([0,1])$ は距離空間であるから第1可算であり，したがって集合 $T\subset C([0,1])$ の任意の集積点は T の可算部分集合の集積点である．ゆえに，C_n が閉であることを示すためには，$C([0,1])$ の中で収束する点列 $\{f_k\}\subset C_n$ の極限 f が C_n に属することをいえば十分である．ところが $f_k\in C_n$ より，すべての h に対して

$$\left|\frac{f_k(t_k+h)-f_k(t_k)}{h}\right|\leq n$$

であるような $t_k\in[0,1]$ が存在する．$[0,1]$ はコンパクトだから点列 $\{t_k\}$ は収束する部分列をもつ．これを改めて $\{t_k\}$ と書くことにする．$t_0=\lim_{k\to\infty}t_k$ とおくと

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}\right|&=\left|\frac{f(t_0+h)-f(t_k+h)}{h}+\frac{f(t_k+h)-f_k(t_k+h)}{h}\right.\\&\qquad\left.+\frac{f_k(t_k+h)-f_k(t_k)}{h}+\frac{f_k(t_k)-f(t_k)}{h}+\frac{f(t_k)-f(t_0)}{h}\right|\\&\leq\underset{①}{\left|\frac{f(t_0+h)-f(t_k+h)}{h}\right|}+\underset{②}{\left|\frac{f(t_k+h)-f_k(t_k+h)}{h}\right|}\end{aligned}$$

$$+\left|\frac{f_k(t_k+h)-f_k(t_k)}{h}\right|+\left|\frac{f_k(t_k)-f(t_k)}{h}\right|+\left|\frac{f(t_k)-f(t_0)}{h}\right|.$$
$$\qquad ③ \qquad\qquad\qquad ④ \qquad\qquad\qquad ⑤$$

いま，h を固定する．任意の $\varepsilon>0$ に対して k が十分大ならば①と⑤は ε より小(f が連続で，$t_k \to t_0$ より)，また②と④も ε より小(f_k が f に一様に収束することより)である．1つ前の式より③$\leq n$．したがって

$$\left|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}\right| \leq n+4\varepsilon \qquad (任意の\ \varepsilon>0)$$

すなわち

$$\left|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}\right| \leq n, \qquad よって \qquad f \in C_n.$$

以上より各 C_n は閉である．次に C_n が全疎であることを示す．すなわち，任意の $g \in C_n=\overline{C}_n$ と任意の $\varepsilon>0$ が与えられたとき，$\|f-g\|<\varepsilon$ かつ $f \notin C_n$ である $f \in C([0,1])$ が存在することを示す．さて，$C([0,1])$ の元であるが C_n の元でない関数の典型的な例が，「のこぎり歯」関数(図 2.3)である．任意の

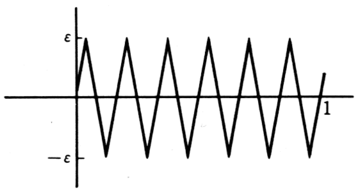


図 2.3

n に対して，このような関数でノルムが任意のきめられた $\varepsilon>0$ より小さいかまたは等しく，各線分の勾配の絶対値が n より大であるようなものを見つけることができる．g から ε 以内にある関数 $f \notin C_n$ を得るためには，図 2.4 のような g に近いのこぎり歯関数を構成すればよい．

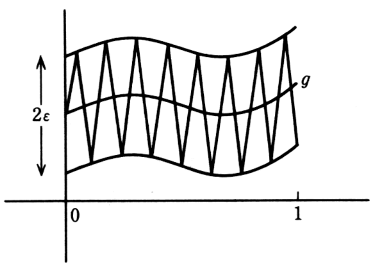


図 2.4

次のヒントに従って，上の関数を構成してみよ．関数 g の一様連続性を用いて，$\|g-g_1\|<\varepsilon/2$ かつ区分線形な連続関数 g_1 を見つける．すなわち g_1 は図 2.5 の折れ線である．g_1 の各線形な部分に対して，適当なのこぎり歯関数を選んでつないでいけばよい．■

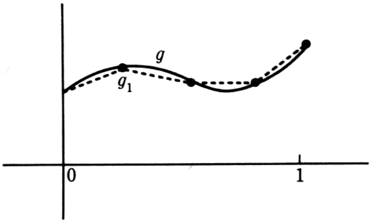


図 2.5

注意　上記定理1は大変興味深いが，重要なのはその内容よりもむしろ証明の方法である．この方法は，しばしば，解析学やトポロジーで特殊な性質をもつ関数の存在を証明するのに使われている．

ベールのカテゴリー定理のもう1つの応用として，正則であるが正規でない位相空間の例を示そう．

例　S を R^2 の上半平面と x 軸 R^1 との和集合とする．$\mathscr{B}_1$ を上半平面内の普通の開集合の集まりとし，

$$\mathscr{B}_2=[B_{(r,\varepsilon)}(\varepsilon)\cup\{r\}\ ;\ r\in R^1,\ \varepsilon>0]$$

とする．$\mathscr{B}_2$ の元は，図 2.6 のように R^1 に接する開球体とその接点 r を合わせたものである．S の位相の基として $\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2$ をとる．

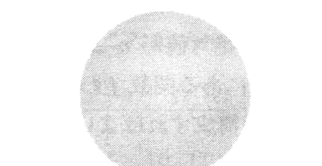


図 2.6

R^1 は相対位相では離散的である．実際，各 $p\in R^1$ に対して $R^1-\{p\}$ は閉である(その補集合は明らかに開集合の和であるから)．任意の部分集合 $F\subset R^1$ に対して $F=\bigcap_{p\in R^1-F}(R^1-\{p\})$ だから R^1 のすべての部分集合は S で閉である．

S は正則である：F は S で閉とし，$p\notin F$ とする．$p\notin R^1$ ならば開集合 F' に含まれる球体 $B_p(\varepsilon)$ が存在する．したがって開集合 $B_p(\varepsilon/2)$ と $(\overline{B_p(\varepsilon/2)})'$

は p と F を分離する．$p\in R^1$ ならば基の元である開集合 V で，p を含み開集合 F' に含まれる(すなわち，$V\cap F=\phi$ である)ものが存在する．基の元である開集合 V_1 を $\bar{V}_1\subset V$ (図 2.7)で p を含むようにとる．明らかに，F の各点(実際は V' の各点) はそれぞれ V_1 と交わらない基の元に含まれる． U をこれらの和集合とすると，V_1 と U は p と F を分離する．

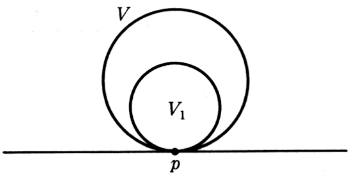


図 2.7

S は正規でない：$F_1\subset R^1$ を有理数の集合，$F_2\subset R^1$ を無理数の集合としよう．このとき，F_1 と F_2 は S で閉である．しかも S の交わらない開集合 U_1, U_2 で，$F_1\subset U_1$, $F_2\subset U_2$ となるものを見つけることはできない．実際，そのような集合 U_1, U_2 が存在したと仮定する．このとき各 $p\in F_j$ ($j=1, 2$) に対し $p\in D_p$ (D_p は p で接する開球体と $\{p\}$ の和集合) なる基の元 $D_p\subset U_j$ が存在する．$\bigcup_{p\in F_1} D_p\subset U_1$ と $\bigcup_{p\in F_2} D_p\subset U_2$ もまた，それぞれ F_1 と F_2 を含む交わらない開集合である．f: $R^1\to R^1$ を $f(p)=(D_p$ の半径$)$ と定義する．(f は連続であるとは限らない．) 各正整数 n に対して

$$T_n=[p\in F_2;\ f(p)\geq 1/n]$$

とおく．このとき，$p\in F_2$ ならば，ある n に対して $f(p)\geq 1/n$ であるから $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n=F_2$ である．そのうえ，

$$R^1=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right)\cup\left(\bigcup_{q\in F_1}\{q\}\right)$$

であるから，集合 R^1 は T_n と $\{q\}$ の可算個の和集合として表わせる．いま，R^1 上に普通の位相を入れる．R^1 は完備距離空間であるから第 2 類である．R^1 を可算個の集合の和集合として表わしたので，これらの集合のすべてが全疎であることはない(普通の位相で)．各 $\{q\}$ は全疎だから，ある n に対して $\bar{T}_n$ は R^1 の開集合を含まねばならない．特に $\bar{T}_n$ はある区間 I を含む．$q\in I$ を有理数とする．$q\in\bar{T}_n$ より，q に収束する点列 $\{p_k\}\subset T_n$ が存在する．ところが，$(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{p_k})\cap D_q\subset U_1\cap U_2=\phi$. 他方，(各 D_{p_k} の半径$)\geq 1/n$ だから $k\to\infty$ で $p_k\to q$ のとき，$f(p_k)\to 0$ とはならない．よって，$U_1\cap U_2\neq\phi$. この矛盾によ

り証明は完了した． ▩

定理 2 (一様有界性の原理) S を完備距離空間とする．$\mathscr{F}$ を S 上の連続な実数値関数の族としたとき，各 $s \in S$ に対して，すべての $f \in \mathscr{F}$ について $|f(s)| \leq M_s$ を満たす定数 M_s が存在するものとする．このとき，空でない開集合 $U \subset S$ と定数 M が存在して，すべての $f \in \mathscr{F}$ とすべての $s \in U$ に対して $|f(s)| \leq M$ とできる．

証明 各 $f \in \mathscr{F}$ と各正整数 n に対して

$$T_{n,f} = [s \in S;\ |f(s)| \leq n]$$

とする．$T_{n,f} = f^{-1}([-n, n])$ だから $T_{n,f}$ は閉である．

$$T_n = \bigcap_{f \in \mathscr{F}} T_{n,f} = [s \in S;\ \text{すべての } f \in \mathscr{F} \text{ に対して } |f(s)| \leq n]$$

とする．T_n は閉集合の共通部分だから閉である．$s \in S$ ならば，すべての $n > M_s$ に対して $s \in T_n$ だから，$\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = S$．ベールのカテゴリー定理より，すべての T_n が全疎であるということはない．すなわち，ある $\bar{T}_n = T_n$ は空でない開集合 U を含まねばならない．このとき，すべての $s \in U$ と $f \in \mathscr{F}$ に対して，$|f(s)| \leq n$ である．ここで $M = n$ とすればよい． ▩

3章　基本群と被覆空間

3.1　ホモトピー

記号　今後，閉区間 $[0, 1]$ を文字 I で表わす．

定義　X と Y を位相空間として，f_0 と f_1 を $X \to Y$ の連続写像とする．f_0 が f_1 に**ホモトピック**である（$f_0 \simeq f_1$ と書く）とは，連続写像 $F: X \times I \to Y$ が存在して，すべての $x \in X$ について $F(x, 0) = f_0(x)$，$F(x, 1) = f_1(x)$ が成り立つことをいう．写像 F を f_0 から f_1 への**ホモトピー**とよぶ．

注意　$(x, t) \in X \times I$ の t は，時刻を示しているとみなせる．このとき，$f_t(x) = F(x, t)$ は $X \to Y$ の写像の 1-パラメータ族である．時刻 0 においては f_0 であり，時刻 1 においては f_1 である．時刻が 0 から 1 へ増加するに従って，写像 f_0 は写像 f_1 に連続的に変形される．

例　$i: R^n \to R^n$ を恒等写像とする．$c: R^n \to R^n$ を各 $v \in R^n$ に対して $c(v) = 0$ と定義する．このとき $c \simeq i$ である．$F: R^n \times I \to R^n$ を $F(v, t) = tv$ と定義すればよい．F は連続で，すべての $v \in R^n$ に対して $F(v, 0) = 0 = c(v)$ かつ $F(v, 1) = v = i(v)$ である．幾何学的には，写像 F は t が 1 から 0 に動くに従い i の像 R^n を 1 点 $\{0\}$ に縮めるのである．

定理 1　ホモトピーは同値関係である．すなわち，f, g, h を $X \to Y$ の連続写像としたとき

（1）　$f \simeq f$,

（2）　$f \simeq g$ ならば $g \simeq f$,

（3）　$f \simeq g$ かつ $g \simeq h$ ならば $f \simeq h$.

証明　（1）　$F: X \times I \to Y$ を $F(x, t) = f(x)$ と定義する．F は直積 $X \times I$

の1番目の因子 X への射影と連続写像 f との合成であるから連続である．

（2）$F(x, 0)=f(x)$，$F(x, 1)=g(x)$ なるホモトピー $F: X\times I\to Y$ が与えられているとする．$G: X\times I\to Y$ を $G(x, t)=F(x, 1-t)$ で定義する．写像 $t\to 1-t$ は連続であるから G は連続．G は g から f へのホモトピーである．

（3）$F(x, 0)=f(x)$，$F(x, 1)=g(x)=G(x, 0)$，$G(x, 1)=h(x)$ である2つのホモトピー $F, G: X\times I\to Y$ が与えられているとする．$H: X\times I\to Y$ を

$$H(x, t)=\begin{cases} F(x, 2t) & (0\le t\le 1/2) \\ G(x, 2t-1) & (1/2\le t\le 1) \end{cases}$$

によって定義する．このとき，$H(x, 0)=f(x)$ かつ $H(x, 1)=h(x)$．また，H は次の補題により連続である．▒

貼合せの補題　X と Y を位相空間とする．$X=A\cup B$ で，A と B はともに X の閉(開)集合であると仮定する．連続写像 $f_1: A\to Y$ と $f_2: B\to Y$ がすべての $x\in A\cap B$ に対して $f_1(x)=f_2(x)$ を満たすとする．このとき，$g: X\to Y$ を

$$g(x)=\begin{cases} f_1(x) & (x\in A) \\ f_2(x) & (x\in B) \end{cases}$$

で定義すれば g は連続である．

注意　補題の関数 g は，f_1 と f_2 をそれらの定義域の共通部分で「貼り合わせ」たものである．

補題の証明　A と B がともに閉集合の場合を考える．閉集合の g による逆像が閉であることを示そう．F を Y の閉部分集合とする．このとき

$$\begin{aligned} g^{-1}(F) &= g^{-1}(F)\cap(A\cup B) \\ &= (g^{-1}(F)\cap A)\cup(g^{-1}(F)\cap B)=f_1^{-1}(F)\cup f_2^{-1}(F). \end{aligned}$$

f_1 は連続であるから，$f_1^{-1}(F)$ は A の中で閉．また，A は X の中で閉であるから $f_1^{-1}(F)$ は X の中でも閉である．同様に，$f_2^{-1}(F)$ は X の中で閉．そして2つの閉集合の和集合は閉である．

A と B が開のときは，上と同様の議論によって開集合の逆像が開であることが示される．▒

定理 2　X, Y, Z を位相空間とする．f_0 と f_1 を $X\to Y$ のホモトピックな写像とし，g_0 と g_1 を $Y\to Z$ のホモトピックな写像とする．このとき $g_0\circ f_0$ と $g_1\circ f_1$ は $X\to Z$ のホモトピックな写像である．

証明　証明は2つの段階に分けて行なう．

$$(\mathrm{a})\quad g_0\circ f_0\simeq g_0\circ f_1,\qquad (\mathrm{b})\quad g_0\circ f_1\simeq g_1\circ f_1$$

を示せば，定理1の(3)によって $g_0\circ f_0\simeq g_1\circ f_1$ がいえる．

（a）　$F: X\times I\to Y$ を f_0 から f_1 へのホモトピーとする．$G=g_0\circ F: X\times I\to Z$ とすれば，G は $g_0\circ f_0$ から $g_0\circ f_1$ へのホモトピーである．

（b）　$H: Y\times I\to Z$ を g_0 から g_1 へのホモトピーとする．$\tilde{f}_1: X\times I\to Y\times I$ を $\tilde{f}_1(x, t)=(f_1(x), t)$ によって定義すると，容易にわかるように $\tilde{f}_1$ は連続である．そこで

$$K=H\circ\tilde{f}_1:\ X\times I\to Z$$

とすると，K は $g_0\circ f_1$ から $g_1\circ f_1$ へのホモトピーである．▌

定義　2つの空間 X と Y が**同じホモトピー型**をもつとは，連続写像 $f: X\to Y$, $g: Y\to X$ が存在して，$g\circ f\simeq i_X$ かつ $f\circ g\simeq i_Y$ となることをいう．ここで，i_X, i_Y はそれぞれ X, Y 上の恒等写像である．

注意　「同じホモトピー型」が同値関係であることは容易に確かめられる．したがって，位相空間全体の集まりは同値類に分割される．2つの空間が同じ類にはいるのは，それらが同じホモトピー型をもつときである．明らかに，同相な空間は同じホモトピー型をもつ．代数的トポロジーでは多くのことが，ホモトピー型で不変な位相空間の性質を調べることにかかわっている．ホモトピー型で不変な性質とは，空間 X の性質であって，X と同じホモトピー型の“すべての”位相空間について成り立つものをいう．

定義　位相空間 X が**可縮**とは，恒等写像 $i_X: X\to X$ が定値写像にホモトピックなことをいう．すなわち，ある $x_0\in X$ に対して $c: X\to\{x_0\}$ として，$i_X\simeq c$.

定理 3　空間 X が可縮なのは，X が1点と同じホモトピー型をもつときであり，かつそのときに限る．

証明　X を可縮とすると，ある $c: X\to\{x_0\}$ $(x_0\in X)$ に対して $i_X\simeq c$. $f=c: X\to\{x_0\}$ とし，$g: \{x_0\}\to X$ を $g(x_0)=x_0$ で定義する．明らかに $g\circ f=c\simeq i_X$ かつ $f\circ g=i_{\{x_0\}}\simeq i_{\{x_0\}}$ であるから，X と $\{x_0\}$ は同じホモトピー型をもつ．

逆に，X が1点からなる空間 $Y=\{y_0\}$ と同じホモトピー型をもつとすると，連続写像 $f: X\to Y$, $g: Y\to X$ が存在して，$g\circ f\simeq i_X$ かつ $f\circ g\simeq i_Y$ である．$x_0=g(y)$, $c: X\to\{x_0\}$ とすれば，$c=g\circ f\simeq i_X$ であるから X は可縮である．▌

注意　定理3とこの節の初めの例によって，R^n が1点と同じホモトピー型であるこ

とがわかる．したがって，ホモトピー論の視点からは R^n は自明な空間である．

3.2 基本群

定義 X を位相空間とする．x_0 から x_1 への（始点 x_0，終点 x_1 の）X の中の**道**とは，連続写像 $\alpha: I \to X$ で，$\alpha(0)=x_0$，$\alpha(1)=x_1$ であるものをいう．

注意 道は関数であって点の集合では“ない”．道とは「パラメータづけされた曲線」である．

定義 空間 X が**弧状連結**であるとは，X の中の任意の2点 x_0, x_1 に対して，始点 x_0，終点 x_1 の道が存在することをいう．

定理 1 位相空間が弧状連結ならば連結である．

証明 X を弧状連結とする．U_0 と U_1 は空でない交わらない開集合で，$U_0 \cup U_1 = X$ なるものとする．$x_0 \in U_0$，$x_1 \in U_1$ とする．X は弧状連結であるから，x_0 から x_1 への道 α が存在する．明らかに $\alpha^{-1}(U_0)$ と $\alpha^{-1}(U_1)$ は交わらない I の中の開集合で，$\alpha^{-1}(U_0) \cup \alpha^{-1}(U_1) = I$ である．また，$0 \in \alpha^{-1}(U_0)$，$1 \in \alpha^{-1}(U_1)$ であるから $\alpha^{-1}(U_0)$，$\alpha^{-1}(U_1)$ は空ではない．ところが，I は連結であるからこのようなことはありえない．▒

注意 次の例に示されるように，定理1の逆は正しくない．

例 $X = A \cup B \subset R^2$ を，相対位相をもった空間とする．ただし

$$A = [(0, y) \in R^2;\ |y| \leq 1], \qquad B = [(x, \sin(1/x)) \in R^2;\ 0 < x \leq 1].$$

X は連結である：U_1 と U_2 を交わらない X の開集合で，$U_1 \cup U_2 = X$ となるものとする．点 $(0, 1)$ は，この2つの集合のどちらかに含まれているから，たとえば $(0, 1) \in U_1$ としよう．$U_2 = \phi$ を示せば，X が連結であることがいえる．まず，$(0, 1) \in U_1 \cap A$ であるから，$U_1 \cap A \neq \phi$．A は連結で

$$A = (U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A)$$

であるから，$U_2 \cap A = \phi$．次に $U_1 \cap B$ を考える．$(0, 1)$ を中心にした R^2 の中のどの円板も $(x, \sin(1/x))$ の形の点を含むから，$U_1 \cap B \neq \phi$．ところが，B は連結――連結集合 $(0, 1]$ の連続像――で，$B = (U_1 \cap B) \cup (U_2 \cap B)$ であるから，$U_2 \cap B = \phi$．したがって $U_2 = (U_2 \cap A) \cup (U_2 \cap B) = \phi$．

X は弧状連結では“ない”：$(0, 1)$ を始点とする X の中の道を α とする．$\alpha(I) \subset A$ を示す．そうすれば，B のどの点も X の中の道で $(0, 1)$ と結ぶこと

はできない．$\alpha^{-1}(A)$ を考える．A は閉であるから，$\alpha^{-1}(A)$ も I で閉．$0\in\alpha^{-1}(A)$ であるから $\alpha^{-1}(A)\neq\phi$．したがって $\alpha^{-1}(A)$ が I で開を示せば十分である．これを示せば，I が連結であるから $\alpha^{-1}(A)=I$ となる．$t_0\in\alpha^{-1}(A)$ とすると $\alpha(t_0)\in A$．$U=X\cap B_{\alpha(t_0)}(1/4)$ とおくと，U は X で開．α は連続であるから，ある $\varepsilon>0$ が存在して，$|t-t_0|<\varepsilon$ ならば $\alpha(t)\in U$ となる．このとき，$\alpha((t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon))\subset A$ であることを証明しよう．$|t_1-t_0|<\varepsilon$ かつ $\alpha(t_1)\in B$ とする．$U\cap B$ は交わらない弧(同相写像による開区間の像)の和集合であって，$\alpha(t_1)$ を含む弧は U の中で開かつ閉である．これは $\alpha((t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon))$ の連結性に反する．したがって $(t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon)\subset\alpha^{-1}(A)$ であり，$\alpha^{-1}(A)$ は I の中で開である(図 3.1 を見よ)．

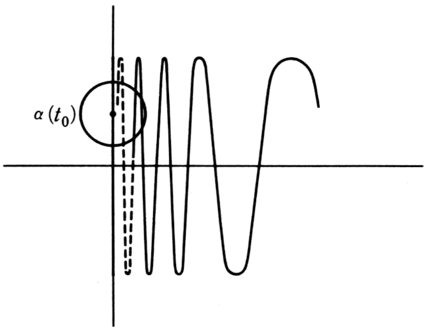


図 3.1

定義 α を x_0 から x_1 への道とし，β を x_1 から x_2 への道とする．α と β の**積**とは，次の式で定義される x_0 から x_2 への道 $\alpha\beta$ のことである．

$$\alpha\beta(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & (0\leq t\leq 1/2)\\ \beta(2t-1) & (1/2\leq t\leq 1)\end{cases}$$

α の**逆**とは，$\alpha^{-1}(t)=\alpha(1-t)$ によって定義される x_1 から x_0 への道 α^{-1} のことをいう．

注意 2つの道の積が連続であることは，「貼合せの補題」(3.1 節)の結果である．

定義 x_0 から x_1 への道 α と β が**ホモトピック**である($\alpha\simeq\beta$ と書く)とは，連続写像 F: $I\times I\to X$ で，任意の $t_2\in I$ に対して

$$F(0,\ t_2)=x_0 \qquad かつ \qquad F(1,\ t_2)=x_1$$

また，任意の $t_1\in I$ に対して

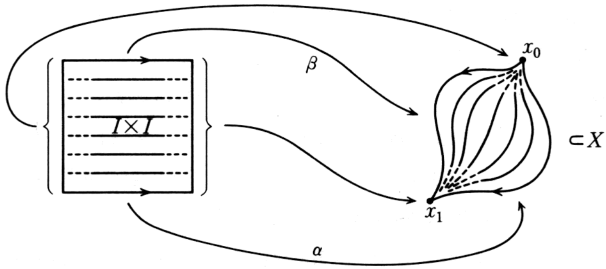


図 3.2

$$F(t_1,\ 0)=\alpha(t_1) \qquad \text{かつ} \qquad F(t_1,\ 1)=\beta(t_1)$$

を満たすものが存在することをいう.

注意　道のホモトピーは通常の意味のホモトピーであって，さらにホモトピーの間も端点を固定したままにしておくものである．この付加条件がなければ，任意の道は動かない道にホモトピックである.

注意　関係$\doteqdot$は同値関係である．証明は$\simeq$に対する証明と同様である(定理1を見よ).

> **定理 2**　$\alpha_0 \doteqdot \alpha_1$ と $\beta_0 \doteqdot \beta_1$ を $\alpha_0\beta_0$ が定義できる道とする．このとき，$\alpha_1\beta_1$ が定義できて $\alpha_1\beta_1 \doteqdot \alpha_0\beta_0$.

証明

$$(\alpha_1 \text{ の終点})=(\alpha_0 \text{ の終点})=(\beta_0 \text{ の始点})=(\beta_1 \text{ の始点})$$

であるから，$\alpha_1\beta_1$ が定義される.

F と G をそれぞれ α_0 から α_1，β_0 から β_1 へのホモトピーとする．このとき $\alpha_0\beta_0$ から $\alpha_1\beta_1$ へのホモトピー H が

$$H(t_1,\ t_2)=\begin{cases} F(2t_1,\ t_2) & (0\leq t_1\leq 1/2) \\ G(2t_1-1,\ t_2) & (1/2\leq t_1\leq 1) \end{cases}$$

によって与えられる．H は「貼合せの補題」によって連続である．▮

> **定理 3**　α_0 と α_1 をホモトピックな道とすると，$\alpha_0^{-1} \doteqdot \alpha_1^{-1}$.

証明　F を α_0 から α_1 へのホモトピーとする．α_0^{-1} から α_1^{-1} へのホモトピー H が，次式によって与えられる.

$$H(t_1,\ t_2)=F(1-t_1,\ t_2). \quad ▮$$

記号　α の$\doteqdot$による同値類を $\langle\alpha\rangle$ と表わす．すなわち $\langle\alpha\rangle$ は α とホモトピックなすべての道の集合である．ホモトピックな道は同じ端点をもつから，$\langle\alpha\rangle$ の始点，終点が定まる.

定義 $\simeq$による同値類の**積**と**逆**が

$$\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle=\langle\alpha\beta\rangle \qquad (\text{ただし } \alpha\beta \text{ が定義されるとき})$$
$$\langle\alpha\rangle^{-1}=\langle\alpha^{-1}\rangle$$

によって定義される．この積と逆は，定理2と3によって代表元のとり方に関係なく定まる．

定理 4 各 $x\in X$ に対して，道 $e_x\colon I\to X$ をすべての $t\in I$ に対して $e_x(t)=x$ で定義される道とする．このとき

(1) $\langle\alpha\rangle$ の始点が x_0 なら $\langle e_{x_0}\rangle\langle\alpha\rangle=\langle\alpha\rangle$.

(2) $\langle\alpha\rangle$ の終点が x_1 なら $\langle\alpha\rangle\langle e_{x_1}\rangle=\langle\alpha\rangle$.

(3) $\langle\alpha\rangle$ の始点が x_0，終点が x_1 なら

$$\langle\alpha\rangle\langle\alpha^{-1}\rangle=\langle e_{x_0}\rangle, \qquad \langle\alpha^{-1}\rangle\langle\alpha\rangle=\langle e_{x_1}\rangle.$$

(4) $(\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle)\langle\gamma\rangle=\langle\alpha\rangle(\langle\beta\rangle\langle\gamma\rangle)$ (ただし $(\alpha\beta)\gamma$ が定義されるとき).

系 X を位相空間とし，$x_0\in X$ とする．始点と終点を x_0 とする道の$\simeq$同値類の集合は，上に定義した積と逆の演算によって群になる．この群を $\pi_1(X, x_0)$ で表わし，組(X, x_0)の**基本群**または**1次のホモトピー群**とよぶ.

定理4の証明 (1) $e_{x_0}\alpha\simeq\alpha$ を示す．そこで，次の条件を満たすような連続写像 $F\colon I\times I\to X$ をつくりたい.

$$F|_{I\times\{0\}}=e_{x_0}\alpha, \qquad F|_{I\times\{1\}}=\alpha$$
$$F|_{\{0\}\times I}=x_0, \qquad F|_{\{1\}\times I}=x_1=\alpha(1).$$

そのために，F を図3.3の三角形上では x_0 への定値写像と定義する．逆台形上の水平な各線分上では，(線分上で適当にパラメータを入れて) α に等しく

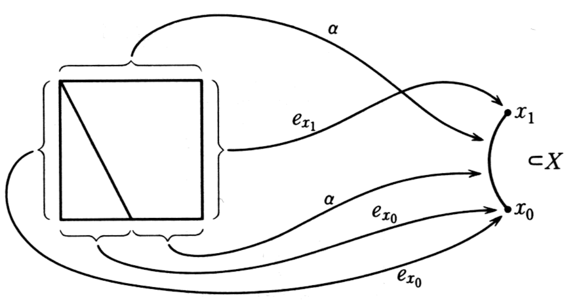


図 3.3

なるようにする．式で書くと

$$F(t_1, t_2)=\begin{cases} x_0 & (2t_1\leq 1-t_2) \\ \alpha\left(\dfrac{2t_1-1+t_2}{1+t_2}\right) & (1-t_2\leq 2t_1). \end{cases}$$

（2）　$\alpha e_{x_1}\simeq\alpha$ を示す．証明は(1)の証明と同様である(図 3.4 を見よ).

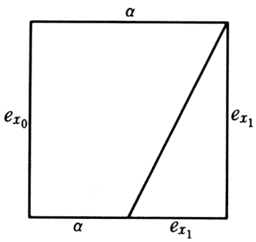


図 3.4

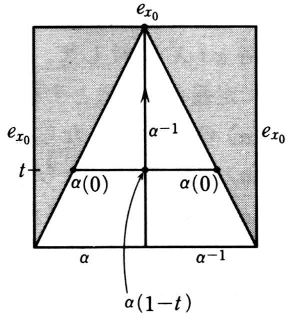


図 3.5

（3）　$\langle\alpha\rangle\langle\alpha^{-1}\rangle=\langle e_{x_0}\rangle$ を示す．これが示せれば，後半は α と α^{-1} の役割を入れかえればよい．そこで $\alpha\alpha^{-1}\simeq e_{x_0}$ を示そう．このために，「終点 x_1 を道 α に沿って x_0 に引き戻す」．図 3.5 を見よ．

問題　上のホモトピーを式で表わせ．

定理 4 の証明の続き　（4）　$(\alpha\beta)\gamma\simeq\alpha(\beta\gamma)$ を示す．さて

$$((\alpha\beta)(\gamma))(t)=\begin{cases} \alpha(4t) & (0\leq t\leq 1/4) \\ \beta(4t-1) & (1/4\leq t\leq 1/2) \\ \gamma(2t-1) & (1/2\leq t\leq 1) \end{cases}$$

$$(\alpha(\beta\gamma))(t)=\begin{cases} \alpha(2t) & (0\leq t\leq 1/2) \\ \beta(4t-2) & (1/2\leq t\leq 3/4) \\ \gamma(4t-3) & (3/4\leq t\leq 1). \end{cases}$$

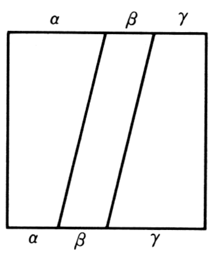


図 3.6

求めるホモトピーは

$$F(t_1, t_2)=\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{4t_1}{t_2+1}\right) & (4t_1-1\leq t_2)\\ \beta(4t_1-t_2-1) & (4t_1-2\leq t_2\leq 4t_1-1)\\ \gamma\left(\dfrac{4t_1-t_2-2}{2-t_2}\right) & (t_2\leq 4t_1-2).\end{cases}$$ ▒

注意 X の中の2つの基点 x_0, x_1 が与えられたとき，一般には $\pi_1(X, x_0)$ と $\pi_1(X, x_1)$ の間になんらかの関係を期待することはできない．たとえば，x_0 と x_1 が X の同じ連結成分に属していなければ，まったく関係がない．円周と1点 x_1 の和集合（x_1 は円周に含まれていない）X を考える（図3.7）．円周上の点 x_0 に対しては，$\pi_1(X, x_0)$ は単位元でない元をもつが，$\pi_1(X, x_1)$ は明らかに単位元だけの群である．

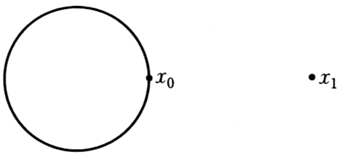


図 3.7

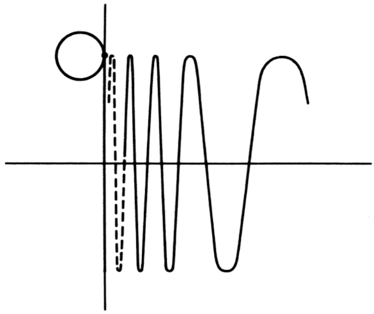


図 3.8

同様に，X が弧状連結でなければ，上の群の間に何の関係も期待できない．空間 $X=X_1\cup X_2\cup X_3\subset R^2$ を考える．ここで，X_1 は $\sin(1/x)$ $(0<x<1)$ のグラフであり，X_2 は $\{0\}\times I$，X_3 は中心を y 軸より左側にもち，点 $(0, 1)$ で y 軸に接する円である（図3.8）．$x_0\in X_1$ に対しては，$\pi_1(X, x_0)$ は単位元だけの群である．しかし $x_1=(0, 1)$ に対しては，$\pi_1(X, x_1)$ は単位元でない元をもつ．

弧状連結な空間では，次のように事態はよくなる．

> **定理 5** X を弧状連結な空間とし，$x_0, x_1\in X$ とする．このとき，$\pi_1(X, x_0)$ から $\pi_1(X, x_1)$ の上への（群としての）同型写像が存在する．

証明 γ を x_0 から x_1 への道とする．$\gamma_\sharp\colon \pi_1(X, x_0)\to\pi_1(X, x_1)$ を $\langle\alpha\rangle\in\pi_1(X, x_0)$ に対して

$$\gamma_\sharp(\langle\alpha\rangle)=\langle\gamma\rangle^{-1}\langle\alpha\rangle\langle\gamma\rangle=\langle\gamma^{-1}\alpha\gamma\rangle$$

と定義する．$\gamma_\sharp$ は準同型写像である．なぜなら

$$\begin{aligned}\gamma_\sharp(\langle\alpha\rangle)\gamma_\sharp(\langle\beta\rangle)&=\langle\gamma\rangle^{-1}\langle\alpha\rangle\langle\gamma\rangle\langle\gamma\rangle^{-1}\langle\beta\rangle\langle\gamma\rangle=\langle\gamma\rangle^{-1}\langle\alpha\rangle\langle e_{x_0}\rangle\langle\beta\rangle\langle\gamma\rangle\\&=\langle\gamma\rangle^{-1}\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle\langle\gamma\rangle=\gamma_\sharp(\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle).\end{aligned}$$

$\gamma_{\#}$ は逆写像すなわち $\gamma_{\#}^{-1}=(\gamma^{-1})_{\#}$ をもつから同型写像である．▒

注意　群 G の元 a に対して，a による G の**内部自己同型写像**とは，$b\in G$ に対して $i_a(b)=aba^{-1}$ で与えられる G からそれ自身への同型写像のことをいう．いま，x_0 から x_1 への X の中の 2 つの道が与えられたとしよう．このとき，2 つの同型写像 $\pi_1(X, x_0)\to\pi_1(X, x_1)$ が得られる．上の証明は，実はこの 2 つの同型写像の差が $\pi_1(X, x_0)$ の内部自己同型写像であることをも示している：

> **系**　γ_1, γ_2 を X の中の x_0 から x_1 への 2 つの道とする．このとき
> $$(\gamma_2)_{\#}=(\gamma_1)_{\#}\circ i_a$$
> が成り立つ．ここで，i_a は $a=\langle\gamma_1\gamma_2^{-1}\rangle\in\pi_1(X, x_0)$ による $\pi_1(X, x_0)$ の内部自己同型写像である．

証明　$\langle\alpha\rangle\in\pi_1(X, x_0)$ とすると

$$\begin{aligned}(\gamma_1)_{\#}^{-1}\circ(\gamma_2)_{\#}(\langle\alpha\rangle)&=\langle\gamma_1\rangle\langle\gamma_2\rangle^{-1}\langle\alpha\rangle\langle\gamma_2\rangle\langle\gamma_1\rangle^{-1}\\&=\langle\gamma_1\gamma_2^{-1}\rangle\langle\alpha\rangle\langle\gamma_1\gamma_2^{-1}\rangle^{-1}=i_a\langle\alpha\rangle\end{aligned}$$

すなわち $(\gamma_1)_{\#}^{-1}\circ(\gamma_2)_{\#}=i_a$．したがって $(\gamma_2)_{\#}=(\gamma_1)_{\#}\circ i_a$．▒

注意　定理 5 は，弧状連結な空間 X のすべての基本群が同型なことを示している．すなわち，空間 X の基本群というある抽象群[1] が定まる．しかし，上の系はこの群が可換でない限り，異なる基点に対する群を同一視する自然な方法がないことを示している(同型写像は 2 つの基点を結ぶ道のホモトピー類に依存している)．したがって基本群は，与えられた基点に関して計算された具体的な群として扱おう．基点の重要性は，連続写像に関する基本群の行動を調べるときに明らかになる．

定義　X と Y を弧状連結な空間とする．$f\colon X\to Y$ を連続とする．$x_0\in X$ に対して $f_*\colon \pi_1(X, x_0)\to\pi_1(Y, f(x_0))$ を

$$f_*(\langle\alpha\rangle)=\langle f\circ\alpha\rangle\qquad(\text{ただし }\langle\alpha\rangle\in\pi_1(X, x_0))$$

によって定義する．この定義は意味をもつ．なぜなら，α と β を x_0 から x_0 への道とし $\alpha\doteq\beta$ とすれば，$f\circ\alpha\doteq f\circ\beta$ だからである($f\circ\alpha$ から $f\circ\beta$ へのホモトピーは，α から β へのホモトピーを F として $f\circ F$ で与えられる)．

注意　$f_*\colon \pi_1(X, x_0)\to\pi_1(Y, f(x_0))$ は準同型写像である．なぜなら，$\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle\in\pi_1(X, x_0)$ に対して

$$\begin{aligned}f_*(\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle)&=f_*(\langle\alpha\beta\rangle)=\langle f\circ(\alpha\beta)\rangle\\&=\langle(f\circ\alpha)(f\circ\beta)\rangle=\langle f\circ\alpha\rangle\langle f\circ\beta\rangle=f_*(\langle\alpha\rangle)f_*(\langle\beta\rangle).\end{aligned}$$

f_* を **f から導かれる準同型写像**とよぶ．

---

1) [訳注]　同型なものを同じとみなした群のこと．

定理 6 X, Y, Zを弧状連結とし，$x_0 \in X$とする．このとき

（1） $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$が連続なら $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

（2） $f_0, f_1: X \to Y$をホモトピックな写像とし，Fをf_0からf_1へのホモトピーとする．このとき

$$(f_1)_* = \sigma_\sharp \circ (f_0)_*$$

が成り立つ．ここでσは$\sigma(t) = F(x_0, t)$によって与えられる$f_0(x_0)$から$f_1(x_0)$へのYの中の道である．

注意 定理6の(2)は，ホモトピックな写像が内部自己同型を除いて同じ基本群の準同型写像を導くことをいっている．この内部自己同型が，2つの写像によってXの基点がYの異なる点に写されるかもしれない事実を補償している．

定理6の証明 （1） $\langle\alpha\rangle \in \pi_1(X, x_0)$とすると

$$(g \circ f)_*(\langle\alpha\rangle) = \langle g \circ f \circ \alpha\rangle = g_*(\langle f \circ \alpha\rangle) = g_* \circ f_*(\langle\alpha\rangle).$$

（2） $\langle\alpha\rangle \in \pi_1(X, x_0)$とする．

$(f_1)_*\langle\alpha\rangle = \sigma_\sharp((f_0)_*\langle\alpha\rangle)$ すなわち $\langle f_1 \circ \alpha\rangle = \sigma_\sharp(\langle f_0 \circ \alpha\rangle) = \langle\sigma^{-1}(f_0 \circ \alpha)\sigma\rangle$

を示したい．そこで$f_1 \circ \alpha \simeq \sigma^{-1}(f_0 \circ \alpha)\sigma$を示そう．そのために，写像$G: I \times I \to Y$を

$$G(t_1, t_2) = F(\alpha(t_1), t_2) \qquad (t_1, t_2 \in I)$$

によって定義する．Fとαが連続であるから，Gは連続である．さらに

$$G(t_1, 0) = F(\alpha(t_1), 0) = f_0(\alpha(t_1)) = f_0 \circ \alpha(t_1)$$
$$G(t_1, 1) = F(\alpha(t_1), 1) = f_1(\alpha(t_1)) = f_1 \circ \alpha(t_1)$$
$$G(0, t_2) = F(\alpha(0), t_2) = F(x_0, t_2) = \sigma(t_2)$$
$$G(1, t_2) = F(\alpha(1), t_2) = F(x_0, t_2) = \sigma(t_2).$$

したがって，Gによって$I \times I$の境界が図3.9のように写像される．

$f_1 \circ \alpha$から$\sigma^{-1}(f_0 \circ \alpha)\sigma$への求めるホモトピー$H$は，$G$を図3.10に示すよう

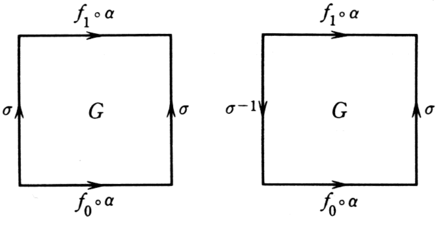


図 3.9

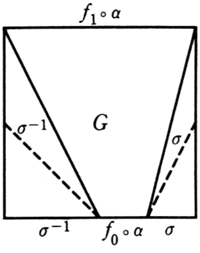


図 3.10

に変形すればよい．式で表わせば，H は次のように与えられる．

$$H(t_1, t_2)=\begin{cases}\sigma^{-1}(2t_1) & (t_1\leq(1-t_2)/2)\\ G\left(\dfrac{4t_1+2t_2-2}{3t_2+1},\ t_2\right) & \left(\dfrac{1-t_2}{2}\leq t_1\leq\dfrac{t_2+3}{4}\right)\\ \sigma(4t_1-3) & (t_1\geq(t_2+3)/4).\end{cases}$$ ▒

系 1　X と Y を同じホモトピー型をもつ弧状連結な空間とすると，それらの基本群は同型である．

証明　X と Y は同じホモトピー型をもつから，写像 $f: X\to Y$ と $g: Y\to X$ が存在して，$g\circ f\simeq i_X$ かつ $f\circ g\simeq i_Y$．基点 $x_0\in X$ を g の像の中に選ぶ．$x_0=g(y_0)$ として，$f_*: \pi_1(X, x_0)\to\pi_1(Y, f(x_0))$ が同型写像であることを示す．

$$g_*: \pi_1(Y, f(x_0))\to\pi_1(X, g\circ f(x_0))$$

であり，定理 6 の (1) と (2) によって

$$g_*\circ f_*=(g\circ f)_*=\sigma_\sharp\circ(i_X)_*=\sigma_\sharp$$

が成り立つ．$\sigma_\sharp: \pi_1(X, x_0)\to\pi_1(X, g\circ f(x_0))$ が同型写像であることより，f_* は単射である．

一方，g から導かれる $\pi_1(Y, y_0)\to\pi_1(X, x_0)$ の準同型写像も考えることができる．これも g_* と表わす．このとき

$$f_*\circ g_*=(f\circ g)_*=(\sigma_1)_\sharp\circ(i_Y)_*=(\sigma_1)_\sharp$$

が成り立ち，$(\sigma_1)_\sharp: \pi_1(Y, y_0)\to\pi_1(Y, f\circ g(y_0))$ は同型写像である．したがって f_* は全射であるから，同型写像である． ▒

系 2　X が可縮なら $\pi_1(X, x_0)=\{e\}$．すなわち，X の基本群は単位元だけからなる．

証明　定義より X が可縮ということは，1 点の空間と同じホモトピー型をもつということである．したがって，系 1 によって証明される． ▒

系 3　$\pi_1(R^n, 0)=\{e\}$.

3.3 被覆空間

この節での空間はすべてハウスドルフ位相空間とする．

定義　空間 X が**局所連結**であるとは，各 $x\in X$ と x を含む任意の開集合 V

に対して $x \in U \subset V$ なる連結な開集合 U が存在することをいう．空間 X が**局所弧状連結**であるとは，各点 $x \in X$ と x を含む任意の開集合 V に対して $x \in U \subset V$ なる開集合 U が存在して，$x_1, x_2 \in U$ ならば $\alpha(I) \subset V$ なる x_1 から x_2 への道 α が存在することをいう．

注意 すべての弧状連結な空間が局所弧状連結とは限らない．たとえば，X を，$\sin(1/x)$ （$x \in (0, 1]$）のグラフと，$(1, 0)$ と $(0, 1)$ を結ぶ弧の和集合とする（図 3.11）．

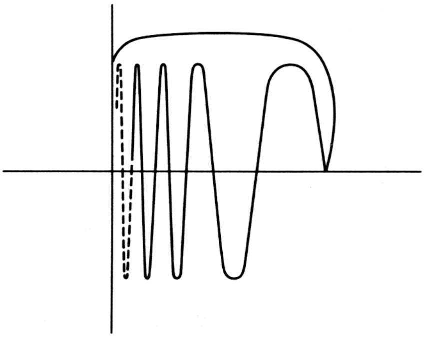


図 3.11

このとき，X は弧状連結である．ところが，$(0, 1)$ を中心とする半径が 1 より小さい R^2 上の円板を B とすると，$V = B \cap X$ は X の中で開であるが，局所弧状連結の定義の条件を満たす開集合 U を含まない．

定義 X と $\tilde{X}$ を弧状連結，かつ局所弧状連結な空間とし，$p: \tilde{X} \to X$ を連続写像とする．組 $(\tilde{X}, p)$ が X 上の**被覆空間**であるとは，次の(1)，(2)が成り立つことをいう．

（1） p は全射．

（2） 各 $x \in X$ に対して x を含む X の中の開集合 U が存在して，$p^{-1}(U)$ は p によって U に同相に写される交わらない開集合の和集合である．このような開集合 U を**標準的**とよぶ．

例 1 $X = S^1 = [z;\ z$ は $|z| = 1$ なる複素数$]$ とする．$\tilde{X} = R^1$ とし，$p: \tilde{X} \to X$ を $p(r) = e^{2\pi i r}$ によって与える．このとき，$(\tilde{X}, p)$ は X の被覆空間である．なぜならば，$x \in X$ に対して x を含む小さな開弧を U とする．$p^{-1}(U)$ は交わらない開区間の和集合になり，各開区間はある整数だけの移動によって互いに写り合う（図 3.12）．$\tilde{X}$ は S^1 の上方にある無限に続いた「ら線」と考えることができる．p は通常の射影である（図 3.13）．

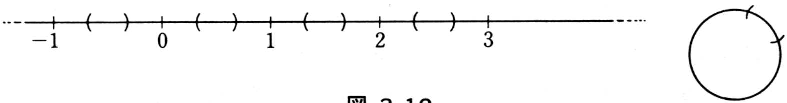


図 3.12

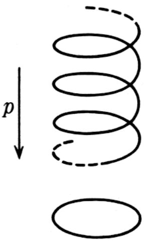


図 3.13

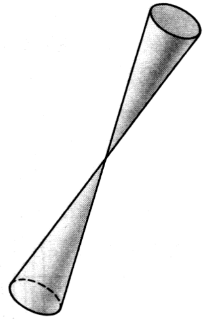


図 3.14

例 2　X を P^2，すなわち R^3 の中の原点を通るすべての直線の集合とする．P^2 上の位相は，原点を通る直線による「開錐」によって生成される(図 3.14)．P^2 を**射影平面**という．$\tilde{X}=S^2\subset R^3$ とし，$p\colon \tilde{X}\to X$ を

$$p(\tilde{x})=(\tilde{x}\ \text{と原点を通る直線})\qquad(\tilde{x}\in\tilde{X})$$

と定義する．このとき，$(\tilde{X}, p)$ は X の被覆空間である．実際，「**2** 重被覆」になっている．すなわち，各 $x\in X$ に対して $p^{-1}(x)$ は **2** 点からなっている．

例 3　$X=\tilde{X}=S^1=[z;\ |z|=1]$ とし，$p\colon \tilde{X}\to X$ を $p(z)=z^2$ ときめる．このとき，$(\tilde{X}, p)$ は X の **2** 重被覆である．

例 4　X を $S^1\times S^1$ すなわちトーラスとする．$\tilde{X}=R^2$ とし，$p\colon \tilde{X}\to X$ を

$$p(r_1, r_2)=(e^{2\pi i r_1}, e^{2\pi i r_2})$$

と定義する．このとき，$(\tilde{X}, p)$ は X の被覆空間である．X 上の「切れはし」

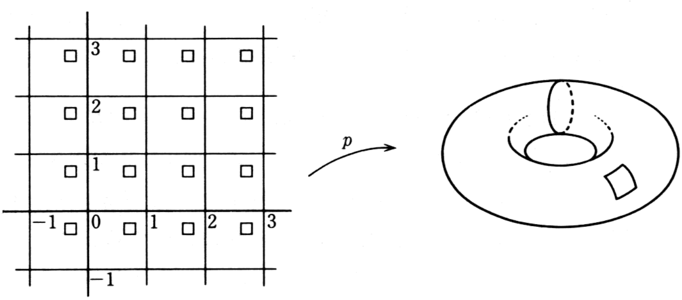


図 3.15

U に対して $p^{-1}(U)$ は R^2 上の「切れはし」の和集合であり，そのおのおのは整数を座標にもつベクトルを足すことによって互いに写り合う．

(単位正方形が p によって $S^1 \times S^1$ の "上に" 写される．実際，$S^1 \times S^1$ は閉単位正方形の1組の対辺を同一視して円筒形をつくり，もう1組の対辺(いまは円周になっている)を同一視してつくったタイヤとみなせる．)

例 5 (「だめな例」) $X=S^1$ とし，$\tilde{X}$ を S^1 の上方にある有限な開ら線とし，$p\colon \tilde{X} \to X$ を射影とする(図3.16)．$(\tilde{X}, p)$ は X の被覆空間では "ない"．なぜなら，x を $\tilde{X}$ の「端」の下にある点とすると，定義の条件(2)を満足する x を含む開集合 U は存在しない．

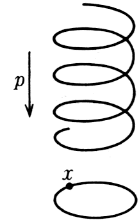


図 3.16

例 6 (もう1つの「だめな例」) $X=S^2$ とし，$\tilde{X}$ を，S^2 を包接する無限に長い円筒とする．p を球面の半径の方向の射影とすると(図3.17)，p が全射でないから $(\tilde{X}, p)$ は被覆空間ではない．

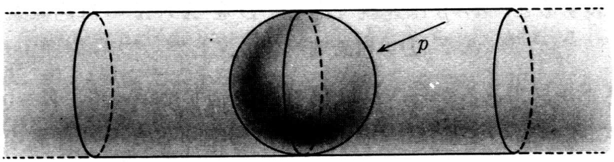


図 3.17

定理 1 $(\tilde{X}, p)$ を X の被覆空間とすると，$p\colon \tilde{X} \to X$ は開写像である．すなわち，各開集合 $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ に対して $p(\tilde{U})$ は X の中で開である．

証明 $\tilde{U}$ を $\tilde{X}$ の中の開集合とする．$x \in p(\tilde{U})$ に対して x を含む標準的な開集合を V とすると，$p^{-1}(V)$ は交わらない開集合の和集合であり，そのおのおのは p によって V の上に同相に写される．$\tilde{x} \in \tilde{U}$ を $p(\tilde{x})=x$ なる点とする．

このとき，$\tilde{x}$ は V の上に同相に写されるこれらの開集合の1つに含まれる．それを W とすると $W \cap \tilde{U}$ は W で開．$p|_W$ が同相写像であるから，$p(W \cap \tilde{U})$ も V の中で開．ところが V は X の中で開であるから，$p(W \cap \tilde{U})$ は X の中の開集合であり $x \in p(W \cap \tilde{U}) \subset p(\tilde{U})$ となる．$x \in p(\tilde{U})$ は任意であったから，$p(\tilde{U})$ は開集合の和集合となって開集合である． ▩

注意 2つの空間 Y, X, 連続写像 $f\colon Y \to X$, および X の被覆空間 $(\tilde{X}, p)$ が与えられたとき，写像 f を写像 $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ に「もち上げられる」か，すなわち $p \circ \tilde{f} = f$ なる

写像 $\tilde{f}$ をつくれるかということがしばしば問題になる．写像 $\tilde{f}$ を f の**被覆**という．次の定理2は，あるゆるい条件のもとで，このような2つの写像(もし存在すれば)は，すべての点で一致するか，あるいはどの点でも一致しないということを示している．その次の定理3と系は，ある写像が実際に「もち上げられる」ことを示している．

> **定理 2**　$(\tilde{X}, p)$ を空間 X の被覆空間とし，Y を連結かつ局所連結な空間とする．α, β: $Y \to \tilde{X}$ を
>
> （1）　$p \circ \alpha = p \circ \beta$,
>
> （2）　$y_0 \in Y$ に対して $\alpha(y_0) = \beta(y_0)$
>
> である連続写像とすると，$\alpha = \beta$ である．

証明
$$Z = [y \in Y;\ \alpha(y) = \beta(y)]$$
とする．$Z = Y$ を示したい．Y は連結で，$Z \neq \phi$ $(y_0 \in Z)$ であるから，Z が開かつ閉であることを示せばよい．

Z が閉であること：写像 $\alpha \times \beta$: $Y \to \tilde{X} \times \tilde{X}$ を
$$(\alpha \times \beta)(y) = (\alpha(y), \beta(y))$$
によって定義すると，$\alpha \times \beta$ は連続である．D を $\tilde{X} \times \tilde{X}$ の対角線集合とする．すなわち
$$D = [(\tilde{x}, \tilde{x});\ \tilde{x} \in \tilde{X}].$$
$\tilde{X}$ はハウスドルフであるから，D は閉である．したがって，$Z = (\alpha \times \beta)^{-1}(D)$ は Y の中で閉．(この議論は，“任意の” 位相空間 S から “任意の” ハウスドルフ空間 T への “任意の” 2つの連続写像に対して，2つの写像が一致するような点の集合が S の中で閉になることを示している.)

Z が開であること：$z \in Z$ とし，$x = p \circ \alpha(z) = p \circ \beta(z)$ とする．Uを，x を含む標準的な開集合とすると，$p^{-1}(U)$ は交わらない開集合の和集合である．$\alpha(z) = \beta(z)$ を含むその中の1つの開集合を W とする．W は $p^{-1}(U)$ の中で開かつ閉である．したがって，$p^{-1}(U)$ の連結な部分集合で W の点を含むものはすっかり W に含まれる．さて，$(p \circ \alpha)^{-1}(U)$ は z を含む Y の開集合である．Y は局所連結であるから，$z \in V_1 \subset (p \circ \alpha)^{-1}(U)$ なる Y の中の連結な開集合 V_1 が存在する．α が連続であるから，$\alpha(V_1)$ は $p^{-1}(U)$ の中の連結集合である．また $\alpha(z) \in W$．したがって $\alpha(V_1) \subset W$．同様に，z を含む Y の中の連結な開集合 V_2 が存在して，$\beta(V_2) \subset W$．$p|_W$ が単射で $p \circ \alpha = p \circ \beta$ であるから，$V_1 \cap V_2$ 上では $\alpha = \beta$ である[1]．したがって $V_1 \cap V_2$ は Z に含まれ，z を含

---

1) ［訳注］ α, β の連続性だけから $V_1 = \alpha^{-1}(W)$，$V_2 = \beta^{-1}(W)$ としてよい．したがって，Y が局所連結であるという仮定もいらない．

む開集合である．これは，Z が開であることを示している．▮

定理 3 （ホモトピー被覆定理） $(\tilde{X}, p)$ を X の被覆空間とし，Y をコンパクト，連結かつ局所連結な空間とする．$f: Y \to \tilde{X}$ とし，$F: Y \times I \to X$ を $y \in Y$ に対して $F(y, 0) = p \circ f(y)$ なるホモトピーとする．このとき，ホモトピー $G: Y \times I \to \tilde{X}$ が存在して，次の(1)，(2)が成り立つ．

（1） $G(y, 0) = f(y)$，かつ

（2） $p \circ G = F$.

さらに，ある区間の t に対して $F(y, t)$ が一定となる $y \in Y$ に対しては，$G(y, t)$ もその区間で一定となるように G を選ぶことができる．

定理 3 を証明する前に，それから導かれる結果をいくつか述べる．

系 1 $(\tilde{X}, p)$ を X の被覆空間とし，$\tilde{x} \in \tilde{X}$ とする．このとき，$p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_1(X, p(\tilde{x}))$ は単射である．

証明 $\langle \tilde{\alpha} \rangle \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ が p_* の核にはいっているとする[1]．このとき

$$\langle p \circ \tilde{\alpha} \rangle = p_*(\langle \tilde{\alpha} \rangle) = e = \langle e_x \rangle \qquad \text{すなわち} \qquad p \circ \tilde{\alpha} \simeq e_x.$$

$\langle \tilde{\alpha} \rangle$ が $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ の単位元であること，すなわち $\tilde{\alpha} \simeq e_{\tilde{x}}$ を示したい．

$p \circ \tilde{\alpha}$ から e_x へのホモトピーを $F: I \times I \to X$ とする．$Y = I$ としたホモトピー被覆定理により，$p \circ G = F$ なるホモトピー $G: I \times I \to \tilde{X}$ が存在して，すべての $t_1 \in I$ に対して $G(t_1, 0) = \tilde{\alpha}(t_1)$ が成り立つ．さらに，$F(0, t_2) = x$ と $F(1, t_2) = x$ は，$t_2 \in I$ に対して一定であるから，G はすべての $t_2 \in I$ に対して

$$G(0, t_2) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{x} \qquad \text{かつ} \qquad G(1, t_2) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}$$

となるように選べる．$p \circ G = F$ であって $F(t_1, 1) = e_x(t_1)$ であるから，道 $t_1 \to G(t_1, 1)$ も道 $t_1 \to e_{\tilde{x}}(t_1)$ もともに p によって e_x に写される．さらに，$G(0,1) = \tilde{x} = e_{\tilde{x}}(0)$ であるから，この 2 つの道は 1 点で一致している．したがって定理 2 によって，すべての $t_1 \in I$ に対して $G(t_1, 1) = e_{\tilde{x}}(t_1)$ が成り立つ．G は $\tilde{\alpha}$ から $e_{\tilde{x}}$ へのホモトピーである．▮

系 2 $(\tilde{X}, p)$ を X の被覆空間とする．α を X の中の道とし，$x_0 = \alpha(0)$ とし，$p(\tilde{x}_0) = x_0$ なる $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ を選ぶ．このとき，$\tilde{x}_0$ を始点とし，α を被覆する，すなわち $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ なる X の中の道 $\tilde{\alpha}$ が "一意的" に存在する．

証明 一意性は上の定理 2 の結果である．存在を証明するために，$Y = \{y_0\}$

---

1) ［訳注］すなわち $p_*(\langle \tilde{\alpha} \rangle) = \langle e_x \rangle$．ただし $x = p(\tilde{x})$．

を1点の空間とし，$f\colon Y\to\tilde{X}$ を $f(y_0)=\tilde{x}_0$ とした場合のホモトピー被覆定理を使う．I への射影は $Y\times I$ から I への同相写像であるから，この同相写像で2つの空間を同一視して，α を $Y\times I\to X$ の写像と見ることができる．そうすると $\alpha(y_0, 0)=x_0=p\circ f(y_0)$ となり，ホモトピー被覆定理によってホモトピー $G\colon Y\times I\to\tilde{X}$ が存在して，$p\circ G=\alpha$ かつ $G(y_0, 0)=f(y_0)=\tilde{x}_0$ が成り立つ．

$\tilde{\alpha}\colon I\to\tilde{X}$ を $\tilde{\alpha}(t)=G(y_0, t)$ によって定義すると，$\tilde{\alpha}$ は求める性質をもっている．▨

系 3 $(\tilde{X}, p)$ を X の被覆空間とし，$x\in X$, $\tilde{x}\in\tilde{X}$, $p(\tilde{x})=x$ とする．このとき，$p^{-1}(\{x\})$ と剰余空間 $\pi_1(X, x)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ の間に，「自然な」1対1対応が存在する．

証明 $c\colon \pi_1(X, x)\to p^{-1}(\{x\})$ を次のように定義する．$g\in\pi_1(X, x)$ とする．α と β を g の2つの代表元とする．すなわち $g=\langle\alpha\rangle=\langle\beta\rangle$．系2によって，$\tilde{x}$ を始点とする $\tilde{X}$ への α と β のもち上げ $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ が一意的に存在する．さて $\alpha\simeq\beta$ であるから，ホモトピー被覆定理によって $\tilde{\alpha}\simeq\tilde{\beta}$．特に，$\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ は同じ終点をもつ．すなわち $\tilde{\alpha}(1)=\tilde{\beta}(1)$．そこで，$g$ の任意の代表元を α として，$c(g)=\tilde{\alpha}(1)$ と定義する．

$\tilde{X}$ は弧状連結であるから，$\tilde{x}$ を $\pi^{-1}(\{x\})$ の各元と $\tilde{X}$ の中の道によって結ぶことができる．この道は X の中の閉じた道(その道を射影したもの)のもち上げになっている．したがって，$c\colon \pi_1(X, x)\to p^{-1}(\{x\})$ は全射である．

次に，c が $\pi_1(X, x)$ の $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ による剰余類上では一定の値をとることを示す．$\langle\alpha\rangle$ と $\langle\beta\rangle$ が同じ剰余類にはいっているとする．このとき，ある $\langle\gamma\rangle\in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ に対して

$$\langle\beta\rangle=\langle\gamma\rangle\langle\alpha\rangle=\langle\gamma\alpha\rangle$$

となる．したがって

$$c(\langle\beta\rangle)=c(\langle\gamma\alpha\rangle)=\widetilde{\gamma\alpha}(1).$$

ところが，系2によって $\widetilde{\gamma\alpha}=\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}$ であるから

$$c(\langle\beta\rangle)=\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}(1)=\tilde{\alpha}(1)=c(\langle\alpha\rangle)$$

となり，c を各剰余類へ制限したものは一定である．したがって

$$\bar{c}(H\langle\alpha\rangle)=c(\langle\alpha\rangle),\qquad \langle\alpha\rangle\in\pi_1(X, x)$$

と定義することによって，c は写像 $\bar{c}\colon \pi_1(X, x)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})\to p^{-1}(\{x\})$ をきめる．ここで，$H\langle\alpha\rangle$ は $\langle\alpha\rangle$ を含む $H=p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ による剰余類である．c が全射であるから，$\bar{c}$ も全射である．$\bar{c}$ は単射でもある．なぜなら $\bar{c}(H\langle\alpha\rangle)=$

$\tilde{c}(H\langle\beta\rangle)$ とすれば $c(\langle\alpha\rangle)=c(\langle\beta\rangle)$, すなわち $\tilde{\alpha}(1)=\tilde{\beta}(1)$ であるから, $\langle\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\rangle\in\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})$ である. $h=p_*(\langle\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\rangle)$ とすると

$$h\langle\beta\rangle=\langle p\circ(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})\rangle\langle\beta\rangle=\langle\alpha\beta^{-1}\rangle\langle\beta\rangle=\langle\alpha\rangle$$

となり, $\langle\alpha\rangle$ と $\langle\beta\rangle$ は H の同じ剰余類にはいっている. すなわち

$$H\langle\alpha\rangle=H\langle\beta\rangle. \quad ▮$$

例 1 $p(r)=e^{2\pi ir}$ として, 直線 R^1 を円周 S^1 の被覆空間と考える. S^1 の基点として点 $z=1$ をとる. このとき, $p^{-1}(\{1\})$ は整数全体の集合になる. $\pi_1(R^1,0)$ は単位元だけの群であるから $p_*\pi_1(R^1,0)=\{e\}$ であり, $\pi_1(S^1,1)$ は整数全体と1対1に対応する(この対応が, 実は群としての同型を与えていることが後にわかる).

例 2 $p(r_1,r_2)=(e^{2\pi ir_1},e^{2\pi ir_2})$ によって, 平面 R^2 をトーラス $S^1\times S^1$ の被覆空間と考える. $\pi_1(R^2,0)$ は単位元だけの群であるから, $\pi_1(S^1\times S^1,(1,1))$ は $p^{-1}\{(1,1)\}$ すなわち整数全体の集合のそれ自身との直積と1対1対応にある(この対応も, 実は群としての同型を与えることがわかる).

例 3 球面 S^2 は射影平面 P^2 の被覆空間である(この節の初めの例2を見よ). $n\in P^2$ を z 軸とする(n は R^3 の中の原点を通る直線であるから, P^2 の1点である). このとき

$$p^{-1}(\{n\})=\{\text{北極},\ \text{南極}\}\subset S^2.$$

後に $\pi_1(S^2,\text{北極})=\{e\}$ を証明するが, さしあたりこのことを仮定する. 系3から $\pi_1(P^2,n)$ は2つの元をもつ, すなわち $\pi_1(P^2,n)=Z_2$ で, 位数2の巡回群であることがわかる. 特に P^2 の中の道 α で, α は定点写像にホモトピックでないが, α^2 は定点写像にホモトピックなものが存在する. α によってきまる P^2 の中の曲線を1回だけ回る道は1点に縮まないけれども, 2回回る道は1点に縮む. 幾何学的には, t が0から1へ動くとき, $x(t)\in S^2$ を, 北極と南極を通る S^2 上の大円に沿って北極から南極へ動く道とする. $\alpha(t)$ を $x(t)$ を通る原点からの直線とすると, $\alpha(t)$ は P^2 の中の道になり, 上に述べた性質をもっている. α の S^2 へのもち上げ $t\to x(t)$ は S^2 の中の閉じた道では"ない"が, α^2 の S^2 へのもち上げは閉じて"いる". すなわち, これはちょうど大円を1回りしている.

定理3の証明 Y と I がコンパクトであるから, $Y\times I$ はコンパクトである. したがって $F(Y\times I)$ もコンパクト. そこで, $F(Y\times I)$ は有限個の標準的な開集合 $U_1,\cdots,U_r$ でおおうことができる ($F(Y\times I)$ を標準的な開集合でおおい, 有限部分被覆をとる). $\{F^{-1}(U_i)\}_{i=1}^{r}$ が $Y\times I$ をおおい, $Y\times I$ の開集

合の基は（Y の開集合）×（I の開区間）の形で書けるから，Y の連結な開集合による有限部分被覆 $\{V_\alpha\}$ と単位区間の分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$ が存在して，$F(V_\alpha\times[t_i, t_{i+1}])\subset$（ある U_l）が成り立つようにできる[1]．

G をつくるために，次の性質(1)，(2)，(3)を満たす G_i: $Y\times[t_{i-1}, t_i]\to\tilde{X}$ $(i=1, \cdots, k)$をつくる．

（1）　$p\circ G_i=F|_{Y\times[t_{i-1}, t_i]}$,

（2）　G_i は連続,

（3）　$Y\times[t_{i-1}, t_i]\cap Y\times[t_i, t_{i+1}]=[(y, t_i)\,;\, y\in Y]$ の上では $G_i=G_{i+1}$.

閉集合に対する貼合せの補題を使って，G_i を貼り合わせて得られる G は連続，また明らかに $p\circ G=F$ となる．

帰納法により，$i\leq j$ に対して G_i が定義され，(1)，(2)$(i=1, \cdots, j$ に対して)，(3)$(i=1, \cdots, j-1$ に対して）を満たすと仮定する．G_{j+1} をつくる．(3)を満足させるために，$G_{j+1}(y, t_j)$ は $G_j(y, t_j)$ と一致させる．G_{j+1}^α: $V_\alpha\times[t_j, t_{j+1}]\to\tilde{X}$ を次のように定義する．まず，X の中のある標準的な開集合 U_l に対して $F(V_\alpha\times[t_j, t_{j+1}])\subset U_l$ である．V_α は連結であるから，集合 $G_j(V_\alpha\times\{t_j\})$ も連結．ところが

$$p\circ G_j(V_\alpha\times\{t_j\})=F(V_\alpha\times\{t_j\})\subset U_l$$

であるから，$G_j(V_\alpha\times\{t_j\})$ は $p|_W$: $W\to U_l$ が同相である1つの開集合 $W\subset p^{-1}(U_l)$ に含まれる．$G_{j+1}^\alpha=(p|_W)^{-1}\circ F|_{V_\alpha\times[t_j, t_{j+1}]}$ と定義する．このとき，$V_\alpha\times\{t_j\}$ 上では $G_{j+1}^\alpha=G_j$ である．

次に，位相空間 $Y\times[t_j, t_{j+1}]$ 上の連続写像 G_{j+1} をつくるために，空間 $Y\times[t_j, t_{j+1}]$ の中のおのおのの開集合 $V_\alpha\times[t_j, t_{j+1}]$ 上で定義された写像 G_{j+1}^α を貼り合わせる．開集合に対する貼合せの補題により，$(V_\alpha\cap V_\beta)\times[t_j, t_{j+1}]$（空でないとき)上で G_{j+1}^α と G_{j+1}^β が一致することだけを確かめればよい．

$G_j(V_\gamma\times\{t_j\})$が開集合 W_γ $(\gamma=\alpha, \beta)$ に含まれ，$p|_{W_\alpha}$: $W_\alpha\to U_l$ と $p|_{W_\beta}$: $W_\beta\to U_m$ が同相であるとする．$V_\gamma\times\{t_j\}$ 上で $G_{j+1}^\gamma=G_j$ $(\gamma=\alpha, \beta)$ であるから，$(V_\alpha\cap V_\beta)\times\{t_j\}$ 上で $G_{j+1}^\alpha=G_{j+1}^\beta$ である．$(V_\alpha\cap V_\beta)\times[t_j, t_{j+1}]$ 上の任意の点は，$(V_\alpha\cap V_\beta)\times[t_j, t_{j+1}]$ 上の道で $(V_\alpha\cap V_\beta)\times\{t_j\}$ と結ぶことができるから

$$G_{j+1}^\gamma(V_\alpha\cap V_\beta\times[t_j, t_{j+1}])\subset W_\alpha\cap W_\beta \qquad (\gamma=\alpha, \beta)$$

となっている．ところが $p\circ G_{j+1}^\gamma=F|_{V_\gamma\times[t_j, t_{j+1}]}$ $(\gamma=\alpha, \beta)$ であり，$W_\alpha\cap W_\beta$ 上では $p|_{W_\alpha}=p|_{W_\beta}$ であるから，$(V_\alpha\cap V_\beta)\times[t_j, t_{j+1}]$ 上で $G_{j+1}^\alpha=G_{j+1}^\beta$ が成り立つ．

1）［訳注］　すぐ前の議論と同様に，$F^{-1}(U_l)$ に含まれる連結な開集合の基の元で $Y\times I$ をおおい，コンパクト性より有限部分被覆をとればよい．

この帰納法の議論は帰納法の出発点，すなわち G_1 をつくることにも使える．$Y\times\{t_0\}$ 上で，G_1 は f に等しい．

定理の最後の主張は，上の構成法によって自動的に満たされる．このことは読者自身で確かめよ．▇

定義 X を弧状連結かつ局所弧状連結な空間とする．X が**単連結**とは，X の基本群が単位元だけの群，あるいは同じことであるが，X の中の任意の道が定点写像にホモトピックであることをいう．

空間 X の被覆空間（$\tilde{X}$, p）が**普遍被覆空間**であるとは，$\tilde{X}$ が単連結のときをいう．

注意 直線，平面，球面は，それぞれ円周，トーラス，射影平面の普遍被覆空間である．しかし，球面が単連結であることはまだ証明はしていない．

定義 空間 X が**局所単連結**であるとは，各 $x\in X$ に対して x を含むある開集合 V が存在して，V の中の $\alpha(0)=\alpha(1)=x$ なる任意の道 α が，定点写像 e_x に X の中でホモトピックになることをいう．

> **定理 4** X を弧状連結，局所弧状連結，局所単連結な空間とする．H を $\pi_1(X, x)$ の部分群とする．このとき，$p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})=H$ となる被覆空間 $(\tilde{X}, p)$ が存在する．ここで，$\tilde{x}\in\tilde{X}$ は $p(\tilde{x})=x$ なる点である．特に，$H=\{e\}$ なら $\tilde{X}$ は単連結であるから，X は普遍被覆空間をもつ．

証明 ホモトピー被覆定理とその系により，$\tilde{X}$[1] の中の任意の道 $\tilde{\alpha}$ は X の中の道 $p\circ\tilde{\alpha}$ の $\tilde{\alpha}(0)$ を始点とする“ただ1つの”もち上げであり，さらに $\tilde{\alpha}$ が閉じた道になるのは $\langle p\circ\tilde{\alpha}\rangle\in p_*\pi_1(\tilde{X}, x)$ のときである（系3）．したがって，$\tilde{X}$ の中の点 $\tilde{\alpha}(1)$ は $\langle p\circ\tilde{\alpha}\rangle$ によってきまる．そこで，$\tilde{X}$ の点を X の中の道からつくろうとしても，おかしくはない．

x から始まる X の中の道全体を Ω で表わす．Ω の中の同値関係 $\overset{H}{\equiv}$ を $\alpha(1)=\beta(1)$ かつ $\langle\alpha\beta^{-1}\rangle\in H$ のとき $\alpha\overset{H}{\equiv}\beta$ ときめる．これは同値関係である．

（1） $\langle\alpha\alpha^{-1}\rangle=\langle e_x\rangle\in H$ であるから $\alpha\overset{H}{\equiv}\alpha$.

（2） $\alpha\overset{H}{\equiv}\beta$ ならば，$\langle\beta\alpha^{-1}\rangle=\langle\alpha\beta^{-1}\rangle^{-1}\in H$ であるから $\beta\overset{H}{\equiv}\alpha$.

（3） $\alpha\overset{H}{\equiv}\beta$, $\beta\overset{H}{\equiv}\gamma$ ならば，$\alpha(1)=\beta(1)=\gamma(1)$ であり

1) ［訳注］ $\tilde{X}$ が構成できたと仮定している．

$$\langle\alpha\gamma^{-1}\rangle=\langle\alpha\beta^{-1}\beta\gamma^{-1}\rangle=\langle\alpha\beta^{-1}\rangle\langle\beta\gamma^{-1}\rangle\in H$$

であるから $\alpha \overset{\mathrm{H}}{\equiv} \gamma$.

$\tilde{X}$ を $\overset{\mathrm{H}}{\equiv}$ による同値類全体の集合とする．$\alpha\in\Omega$ に対して α の $\overset{\mathrm{H}}{\equiv}$ による同値類を $[\alpha]$ で表わす．$p\colon \tilde{X}\to X$ を $p([\alpha])=\alpha(1)$ と定義する．X が弧状連結であるから，p は全射である．

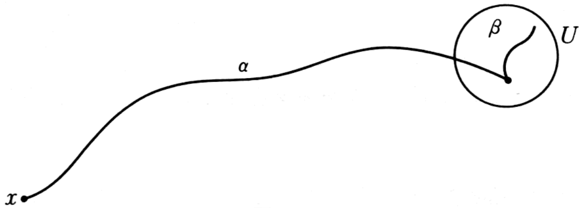


図 3.18

$\tilde{X}$ の位相を次のようにきめる．$[\alpha]\in\tilde{X}$ に対して，$\alpha(1)$ を含む X の開集合を U として

$$([\alpha],\ U)=\{[\alpha\beta]\ ;\ \beta \text{ は } \alpha(1) \text{ を始点とする } U \text{ の中の道}\}$$

とする．このような $([\alpha],\ U)$ すべてに ϕ を加えた族を $\tilde{X}$ 上の位相の基とする．これは次の(1), (2)から基になる．

（1） $\tilde{X}=([e_x],\ X)$ であり，

（2） 上のような 2 つの集合 $([\alpha_1],\ U_1)$, $([\alpha_2],\ U_2)$ に対して，$[\gamma]\in([\alpha_1],\ U_1)\cap([\alpha_2],\ U_2)$ とすると，$([\gamma],\ U_1\cap U_2)\subset([\alpha_1],\ U_1)\cap([\alpha_2],\ U_2)$ となる．

$\tilde{X}$ 上の位相はハウスドルフである．これを証明するために，$[\alpha_1]\neq[\alpha_2]$ なる $[\alpha_1], [\alpha_2]\in\tilde{X}$ をとる．$\alpha_1(1)\neq\alpha_2(1)$ なら，$\alpha_1(1)\in U_1$, $\alpha_2(1)\in U_2$ なる X の中の交わらない開集合 U_1, U_2 が存在する（X はハウスドルフである）．このとき，明らかに $([\alpha_1],\ U_1)\cap([\alpha_2],\ U_2)=\phi$ である．そこで $\alpha_1(1)=\alpha_2(1)$ とする．X は局所単連結であるから，$\alpha_1(1)=\alpha_2(1)$ を含む開集合 U が存在して，U の中の任意の閉じた道は X の中で定点写像とホモトピックである．このとき $([\alpha_1],\ U)\cap([\alpha_2],\ U)=\phi$ である．もしそうでないとすると，$\alpha_1(1)=\alpha_2(1)$ を始点とする道 β と γ が存在して，$[\alpha_1\beta]=[\alpha_2\gamma]$ が成り立つ．すなわち $\alpha_1\beta \overset{\mathrm{H}}{\equiv} \alpha_2\gamma$．したがって $\langle\alpha_1\beta\gamma^{-1}\alpha_2{}^{-1}\rangle\in H$．ところが，$\beta\gamma^{-1}$ は U の中の閉じた道であるから $\beta\gamma^{-1}\simeq e_{\alpha_1(1)}$ であり，

$$\langle\alpha_1\alpha_2{}^{-1}\rangle=\langle\alpha_1 e_{\alpha_1(1)}\alpha_2{}^{-1}\rangle=\langle\alpha_1\beta\gamma^{-1}\alpha_2{}^{-1}\rangle\in H.$$

すなわち $\alpha_1 \overset{\mathrm{H}}{\equiv} \alpha_2$ であり，$[\alpha_1]=[\alpha_2]$ となる．これは矛盾である．

$p\colon \tilde{X}\to X$ は連続である．なぜなら，U を X の中の開集合とすると，各 $[\alpha] \in p^{-1}(U)$ に対して $([\alpha], U)$ は $p^{-1}(U)$ の中に含まれる $\tilde{X}$ の中の開集合である．

$\tilde{X}$ は弧状連結である．これを示すために，$[\alpha], [\beta] \in \tilde{X}$ をとる．$[\alpha]$ から $[\beta]$ への $\tilde{X}$ の中の道をつくるために，まず X の中の α を終点から始点まで引っぱって縮める．次に β に沿って終点までのばして $\overset{\mathrm{H}}{\equiv}$ による同値類をとる．式で書けば，$f(0)=[\alpha]$，$f(1)=[\beta]$ なる $f\colon I\to\tilde{X}$ を次のように定義する．

$$f(t_2)=\begin{cases}[\alpha_{t_2}] & (0\leq t_2\leq 1/2)\\ [\beta_{t_2}] & (1/2\leq t_2\leq 1)\end{cases}$$

ここで

$$\alpha_{t_2}(t_1)=\alpha((1-2t_2)t_1) \qquad (t_2\leq 1/2)$$
$$\beta_{t_2}(t_1)=\beta((2t_2-1)t_1) \qquad (t_2\geq 1/2).$$

f は連続である．なぜなら，$([\gamma], U)$ を $\tilde{X}$ の位相の基である開集合とすると

$$f^{-1}([\gamma], U)=[t_2\in I;\ f(t_2)\in([\gamma], U)]=A\cup B$$

と書けて

$$A=[t_2\in[0, 1/2];\ [\alpha_{t_2}]\in([\gamma], U)]$$
$$B=[t_2\in[1/2, 1];\ [\beta_{t_2}]\in([\gamma], U)].$$

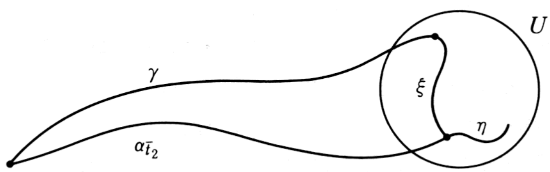


図 3.19

最初に，A が開集合であることを示す．$\bar{t}_2\in A$ とすると $\alpha_{\bar{t}_2}(1)\in U$．$t_2\to\alpha_{t_2}(1)$ は連続であるから，$\bar{t}_2$ を含む開区間 J が存在して，任意の $t_2\in J$ に対して $\alpha_{t_2}(1)\in U$ が成り立つ．さらに，$t_2\in J$ に対して $\langle\alpha_{t_2}\rangle=\langle\alpha_{\bar{t}_2}\eta\rangle$ が成り立つ．ここで η は，$\alpha_{\bar{t}_2}(1)$ から $\alpha_{t_2}(1)$ への α に沿った道である．また，$\bar{t}_2\in A$ であるから，$\gamma(1)$ から $\alpha_{\bar{t}_2}(1)$ への U の中のある道 ξ に対して $[\alpha_{\bar{t}_2}]=[\gamma\xi]$ となる．すなわち $\langle\alpha_{\bar{t}_2}\xi^{-1}\gamma^{-1}\rangle\in H$．ところが

$$\langle\alpha_{t_2}(\gamma\xi\eta)^{-1}\rangle=\langle\alpha_{t_2}\eta^{-1}\xi^{-1}\gamma^{-1}\rangle=\langle\alpha_{\bar{t}_2}\xi^{-1}\gamma^{-1}\rangle\in H$$

であるから

$$\alpha_{t_2}\overset{\mathrm{H}}{\equiv}\gamma(\xi\eta).$$

ここで $\xi\eta$ は，$\gamma(1)$ から $\alpha_{t_2}(1)$ への U の中の道である．すなわち，すべての $t_2 \in J$ に対して

$$[\alpha_{t_2}]=[\gamma(\xi\eta)] \in ([\gamma],\ U).$$

J は $\bar{t}_2$ を含む開集合であるが，これが A に含まれるから A は開である．同様にして，B も開であるから $f^{-1}([\gamma],\ U)$ は開．これは，f が連続なことを示しているから，$\tilde{X}$ が弧状連結であることが証明された．

$(\tilde{X},\ p)$ は被覆空間である．これを示すために，各 $x_1 \in X$ に対して x_1 を含む弧状連結な開集合で，その中の任意の道が X の中で定点写像にホモトピックになるもの U をとる．$\tilde{X}$ がハウスドルフであることの証明と同様に，もし $[\alpha_1]\neq[\alpha_2]$ が $p([\alpha_1])=p([\alpha_2])$ すなわち $\alpha_1(1)=\alpha_2(1)$ ならば，$([\alpha_1],\ U)\cap([\alpha_2],\ U)=\phi$ である．また，U が弧状連結であるから，$p([\alpha])=x_1$ なる任意の $[\alpha]$ に対して $p|_{([\alpha],U)}:([\alpha],\ U)\to U$ は全射である．さらに，$p|_{([\alpha],U)}$ は単射である．これを示すために，x_1 を始点とする U の中の道 β,γ に対して $p([\alpha\beta])=p([\alpha\gamma])$ であったとする．このとき $\beta(1)=\gamma(1)$ であるから，$\beta\gamma^{-1}$ は U の中の閉じた道となり，定点写像 e_{x_1} にホモトピックである．すなわち

$$\langle(\alpha\beta)(\alpha\gamma)^{-1}\rangle=\langle\alpha(\beta\gamma^{-1})\alpha^{-1}\rangle=\langle\alpha e_{x_1}\alpha^{-1}\rangle=\langle e_{x_1}\rangle \in H$$

であり

$$[\alpha\beta]=[\alpha\gamma].$$

さて，α を $p([\alpha])=x_1$ なるものすべてにわたって動かすとき，$p^{-1}(U)=\bigcup_{\alpha}([\alpha],\ U)$．なぜなら，$p([\gamma])=\gamma(1)\in U$ なる道 γ に対して β を $\gamma(1)$ から x_1 への U の中の道とすれば，$p([\gamma\beta])=x_1$，$[\gamma]\in([\gamma\beta],\ U)$ となる．

$(\tilde{X},\ p)$ が被覆空間であることの証明には，p が開写像すなわち開集合を開集合に写すことだけを示せばよい．このために $\tilde{V}$ を $\tilde{X}$ の中の開集合とする．$\tilde{V}$ は開集合の基の元 $\tilde{U}=([\alpha],\ U)$ の和集合で書けるから，このような $\tilde{U}$ に対して $p(\tilde{U})$ が開であることを示せばよい．そこで $x_1\in p(\tilde{U})$ とする．すなわち，ある $[\beta]\in\tilde{U}$ に対して $x_1=p([\beta])=\beta(1)$ とする．U_1 を U の中の道で x_1 と結べる U の点全体の集合とする．X が局所弧状連結であることから，U_1 が開集合であることは容易に確かめられる．$U_1\subset p(\tilde{U})$ であることを示そう．そうすれば，$p(\tilde{U})$ が開であることがわかる．実際 $U_1=p([\beta],\ U_1)$ である．また，γ を U に含まれる道として，$[\beta]=[\alpha\gamma]$．したがって，任意の元 $[\eta]\in([\beta],\ U_1)$ は

$$[\eta]=[\beta\delta]=[\alpha\gamma\delta]\in([\alpha],\ U)=\tilde{U}$$

という形に書ける．ただし，δ は $\beta(1)$ から $\eta(1)$ への U_1 の中の道である．し

たがって $([\beta], U_1) \subset \tilde{U}$.

最後に，定理の証明を完結するためには，$\tilde{x} = [e_x]$ として $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = H$ を示さなければならない．このために，α を x から始まる X の中の任意の道とする．$\tilde{\alpha}$ を $\tilde{\alpha}(t_2) = [\alpha_{t_2}]$, $\alpha_{t_2}(t_1) = \alpha(t_2 t_1)$ で定義される $\tilde{x}$ から始まる $\tilde{X}$ の中の道とする．$\tilde{\alpha}$ は連続である．これには，$\tilde{X}$ が弧状連結であることの証明で f に対して行なった議論を見ればよい．$\tilde{\alpha}$ は α を被覆している．なぜなら，$p(\tilde{\alpha}(t_2)) = p([\alpha_{t_2}]) = \alpha_{t_2}(1) = \alpha(t_2)$. α を閉じた道と仮定しよう．すなわち，$\langle\alpha\rangle \in \pi_1(X, x)$. このとき

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha\rangle \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) &\Leftrightarrow \tilde{\alpha} \text{ は } \tilde{X} \text{ の中の閉じた道} \\
&\Leftrightarrow \tilde{\alpha}(1) = [e_x] \\
&\Leftrightarrow [\alpha] = [e_x] \\
&\Leftrightarrow \alpha \overset{\mathrm{H}}{\equiv} e_x \\
&\Leftrightarrow \langle\alpha\rangle \in H.
\end{aligned}
$$

したがって $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = H$. これは求めていたことであった．▮

注意 群 G の 2 つの部分群 H_1 と H_2 が共役とは，ある $g \in G$ に対して

$$H_2 = gH_1g^{-1} = [gh_1g^{-1};\ h_1 \in H_1]$$

となることである．

> **定理 5** $(\tilde{X}, p)$ を X の被覆空間とし，$x \in X$, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(\{x\})$ とする．このとき，$p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ と $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)$ は $\pi_1(X, x)$ の中で共役である．

証明 $\tilde{\gamma}$ を $\tilde{X}$ の中の $\tilde{x}_1$ から $\tilde{x}_2$ への道とする．このとき，3.2 節の定理 5 によって

$$\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = [\langle\tilde{\gamma}\rangle\langle\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\gamma}^{-1}\rangle;\ \langle\tilde{\alpha}\rangle \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)].$$

射影すると

$$p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = [\langle p\circ\tilde{\gamma}\rangle h \langle p\circ\tilde{\gamma}^{-1}\rangle;\ h \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)]$$

となる．また，$\langle p\circ\tilde{\gamma}\rangle \in \pi_1(X, x)$ である．▮

> **定理 6** X を局所弧状連結，局所単連結とし，$(\tilde{X}, p)$ を X の被覆空間，$(\tilde{\tilde{X}}, \tilde{p})$ を $\tilde{X}$ の被覆空間とすると，$(\tilde{\tilde{X}}, p\circ\tilde{p})$ は X の被覆空間である．

証明 読者の練習問題とする．

> **定理 7** X を局所弧状連結，局所単連結とし，$(\tilde{X}_1, p_1)$ と $(\tilde{X}_2, p_2)$ を X の被覆空間とする．$\tilde{x}_j \in \tilde{X}_j$ $(j=1, 2)$ に対し $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$ で
>
> $$(p_1)_*\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subset (p_2)_*\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$$

が成り立つとするとき，$\tilde{p}(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_2$ なる写像 $\tilde{p}$: $\tilde{X}_1\to\tilde{X}_2$ が一意的に存在して，$(\tilde{X}_1, \tilde{p})$ は $\tilde{X}_2$ の被覆空間である．さらに，$p_2\circ\tilde{p}=p_1$ が成り立つ．

証明　$y\in\tilde{X}_1$ に対して $\tilde{p}(y)$ を次のように定義する．γ_1 を $\tilde{X}_1$ の中の $\tilde{x}_1$ から y への道とすると，$p_1\circ\gamma_1$ は $p_1(\tilde{x}_1)=p_2(\tilde{x}_2)$ を始点とする X の中の道である．$\tilde{x}_2$ を始点とする $p_1\circ\gamma_1$ の $\tilde{X}_2$ へのもち上げを γ_2 とし，$\tilde{p}(y)=\gamma_2(1)$ とする．これは γ_1 のとり方によらない．なぜなら，$\tilde{X}_1$ の中の $\tilde{x}_1$ から y へのもう1つの道を β_1 とすると，$\langle\gamma_1\beta_1^{-1}\rangle\in\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ であるから

$$(p_1)_*(\langle\gamma_1\beta_1^{-1}\rangle)\in(p_1)_*\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)\subset(p_2)_*\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2).$$

したがって，$p_1\circ\gamma_1\beta_1^{-1}$ の $\tilde{X}_2$ へのもち上げは閉じた道になる．すなわち $\gamma_2(1)=\beta_2(1)$．

$\tilde{p}$ の連続性と一意性，および $(\tilde{X}_1, \tilde{p})$ が $\tilde{X}_2$ の被覆空間になることの証明は新しい技法を必要としないから，練習問題として読者に任せる．▒

定義　空間 X の2つの被覆空間 $(\tilde{X}_1, p_1)$ と $(\tilde{X}_2, p_2)$ が**同型**であるとは，$p_2\circ h=p_1$ なる同相写像 h: $\tilde{X}_1\to\tilde{X}_2$ が存在することである．

注意　定理4によれば，ある空間の基本群の部分群 H を与えると被覆空間が存在して，その基本群が射影によって H の上に同型に写される．次の定理は，この被覆空間が同型を除いて一意的であることをいっている．

定理 8　X を局所弧状連結，局所単連結とし，$(\tilde{X}_1, p_1)$ と $(\tilde{X}_2, p_2)$ を X の被覆空間とする．$\tilde{x}_j\in\tilde{X}_j$ $(j=1, 2)$ に対して，$p_1(\tilde{x}_1)=p_2(\tilde{x}_2)$ かつ

$$(p_1)_*\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)=(p_2)_*\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$$

が成り立つならば，$(\tilde{X}_1, \tilde{p}_1)$ と $(\tilde{X}_2, \tilde{p}_2)$ は同型である．

証明　定理7により，写像 $\tilde{p}$: $\tilde{X}_1\to\tilde{X}_2$ と $\tilde{q}$: $\tilde{X}_2\to\tilde{X}_1$ が存在して，$(\tilde{X}_1, \tilde{p})$ は $\tilde{X}_2$ の被覆空間であり，$(\tilde{X}_2, \tilde{q})$ は $\tilde{X}_1$ の被覆空間である．そして，$p_1=p_2\circ\tilde{p}$, $p_2=p_1\circ\tilde{q}$, $\tilde{p}(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_2$, $\tilde{q}(\tilde{x}_2)=\tilde{x}_1$ となる．したがって

$$p_1=p_2\circ\tilde{p}=p_1\circ(\tilde{q}\circ\tilde{p})$$

であるから，定理6によって $(\tilde{X}_1, \tilde{q}\circ\tilde{p})$ は $\tilde{X}_1$ の被覆空間である．定理7の一意性の部分から $\tilde{q}\circ\tilde{p}=i_{\tilde{X}_1}$．同様に $\tilde{p}\circ\tilde{q}=i_{\tilde{X}_2}$．したがって $\tilde{q}=\tilde{p}^{-1}$ であり，$\tilde{p}$ は同相写像で $p_2\circ\tilde{p}=p_1$．すなわち $(\tilde{X}_1, p_1)$ と $(\tilde{X}_2, p_2)$ は同型である．▒

定義　$(\tilde{X}, p)$ を X の被覆空間とする．$(\tilde{X}, p)$ の**被覆変換**あるいは**デッキ変換**とは，$p\circ h=p$ なる同相写像 h: $\tilde{X}\to\tilde{X}$ のことをいう．

被覆変換の全体は写像の合成によって群をなす．これを**デッキ変換群**とよび，$\mathcal{G}(\tilde{X}, p)$ と書く． U を X の中の標準的な開集合としたとき，h は $p^{-1}(U)$ の中の U のコピー($\tilde{X}$ の「デッキ」)を入れかえる写像がデッキ変換 h である．

定義 被覆空間 $(\tilde{X}, p)$ が**正則な被覆空間**であるとは，ある $\tilde{x}\in\tilde{X}$ に対して $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ が $\pi_1(X, p(\tilde{x}))$ の正規部分群であることをいう．正規部分群は，そのすべての共役群と等しいから，この定義は基点 $\tilde{x}\in\tilde{X}$ のとり方によらない．

定理 9 $(\tilde{X}, p)$ を局所弧状連結，局所単連結な空間 X の被覆空間とすると，デッキ変換の群 $\mathcal{G}(\tilde{X}, p)$ は商群 $\pi_1(X, p(\tilde{x}))/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ と同型．

系 1 $(\tilde{X}, p)$ が普遍被覆空間なら $\pi_1(X, x)\cong\mathcal{G}(\tilde{X}, p)$．すなわち，$\pi_1(X, x)$ は $\mathcal{G}(\tilde{X}, p)$ に同型である．

系 2 $\pi_1(S^1, 1)\cong\mathcal{I}$ (ここで $\mathcal{I}$ は整数全体のなす群)．

系２の証明 S^1 の普遍被覆空間は (R^1, p)，$p(r)=e^{2\pi ir}$ である．(R^1, p) のデッキ変換は同相写像 $h: R^1\to R^1$ で， $p\circ h=p$ すなわち $e^{2\pi ih(r)}=e^{2\pi ir}$ なるものである．よって，$h(r)-r$ は任意の $r\in R^1$ に対して整数である．ところが，$r\to h(r)-r$ は $R^1\to\mathcal{I}$ の連続写像である．R^1 は連結であるから，その連続写像による像も連結．したがって，ある k に対して $h(r)-r=k$．すなわち，ある k に対して $h(r)=r+k$． 結局， h は整数 k による平行移動である． ▮

系 3 $\pi_1(S^1\times S^1, (1, 1))\cong\mathcal{I}\oplus\mathcal{I}$．

定理９の証明 $H=p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ とする．定理８によって，$(\tilde{X}, p)$ は基本群が H の上に射影される任意の被覆空間でおきかえてよい．特に，$(\tilde{X}, p)$ は定理４の証明の中でつくられた被覆空間とし，$\tilde{x}=[e_x]$ $(x\in X)$ としてよい．全射でありかつ核 H をもつ準同型写像 $\varphi: \pi_1(X, x)\to\mathcal{G}(\tilde{X}, p)$ を構成しよう．そうすれば，定理は群論から導かれる．

$\langle\alpha\rangle\in\pi_1(X, x)$ に対して，$\varphi(\langle\alpha\rangle)$ を

$$\varphi(\langle\alpha\rangle)([\beta])=[\alpha\beta] \qquad ([\beta]\in\tilde{X} \text{ に対して})$$

によって定義されるデッキ変換とする． この写像 φ は α と β のとり方によらない．なぜなら，$\alpha\doteq\alpha_1$，$\beta\overset{H}{\equiv}\beta_1$ とすると，$\langle\alpha\rangle=\langle\alpha_1\rangle$，$\langle\beta\beta_1{}^{-1}\rangle\in H$ で，H は正規であるから

$$\langle\alpha\beta(\alpha_1\beta_1)^{-1}\rangle=\langle\alpha\rangle\langle\beta\beta_1{}^{-1}\rangle\langle\alpha_1\rangle^{-1}=\langle\alpha\rangle\langle\beta\beta_1{}^{-1}\rangle\langle\alpha\rangle^{-1}\in H.$$

したがって，$\alpha\beta\overset{\mathrm{H}}{\equiv}\alpha_1\beta_1$となり，$[\alpha\beta]=[\alpha_1\beta_1]$.

$\varphi(\langle\alpha\rangle)$ は逆 $\varphi(\langle\alpha^{-1}\rangle)$ をもつから全単射である．任意の $([\beta],\ U)$ に対して明らかに $\varphi(\langle\alpha\rangle)^{-1}(([\beta],\ U))=\varphi(\langle\alpha^{-1}\rangle)(([\beta],\ U))=([\alpha^{-1}\beta],\ U)$ であるから，$\varphi(\langle\alpha\rangle)$は連続である．同様に，$\varphi(\langle\alpha\rangle)^{-1}$ も連続であるから，$\varphi(\langle\alpha\rangle)$ は同相写像である．

各 $\langle\alpha\rangle$ に対して

$$p((\varphi\langle\alpha\rangle)([\beta]))=\alpha\beta(1)=\beta(1)=p([\beta])$$

であるから，$\varphi(\langle\alpha\rangle)$ はデッキ変換である．

φ は準同型である．なぜなら，各 $[\beta]\in\tilde{X}$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi(\langle\alpha_1\rangle\langle\alpha_2\rangle)([\beta])&=\varphi(\langle\alpha_1\alpha_2\rangle)([\beta])=[\alpha_1\alpha_2\beta]\\&=\varphi(\langle\alpha_1\rangle)([\alpha_2\beta])=\varphi(\langle\alpha_1\rangle)\circ\varphi(\langle\alpha_2\rangle)([\beta]).\end{aligned}$$

すなわち，任意の $\langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle\in\pi_1(X,\ x)$ に対して

$$\varphi(\langle\alpha_1\rangle\langle\alpha_2\rangle)=\varphi(\langle\alpha_1\rangle)\circ\varphi(\langle\alpha_2\rangle).$$

φ の核は H である．なぜなら

$$\varphi(\langle\alpha\rangle)([\beta])=[\beta]\Leftrightarrow[\alpha\beta]=[\beta]\Leftrightarrow\alpha\beta\overset{\mathrm{H}}{\equiv}\beta\Leftrightarrow\langle\alpha\rangle=\langle\alpha\beta\beta^{-1}\rangle\in H.$$

φ は全射である．これを示すために，$h\colon\tilde{X}\to\tilde{X}$ をデッキ変換としよう．$[\alpha]=h([e_x])$ とすると，$\alpha(1)=p([\alpha])=x$ であるから α は X の中の閉じた道である．すなわち$\langle\alpha\rangle\in\pi_1(X,\ x)$．このとき $\varphi(\langle\alpha\rangle)=h$．なぜなら，$\varphi(\langle\alpha\rangle)$ と h はともに $\tilde{X}\to\tilde{X}$ の写像で

$$p\circ(\varphi\langle\alpha\rangle)=p\circ h=p$$

となっている．また，$\varphi(\langle\alpha\rangle)([e_x])=[\alpha e_x]=[\alpha]=h([e_x])$ であるから，定理7によって $\varphi(\langle\alpha\rangle)=h$. ■

4章　単体的複体

この章の目的は，多くの空間の基本群を計算する方法を確立することにある．ただし，ここで扱う空間は，単体とよばれる位相的な基礎単位をつなぎ合わせて得られるものである．0次元単体は1点，1次元単体は線分，2次元単体は三角形，3次元単体は4面体，等々である．後の章で扱うすべての空間は，単体から組み立てられた空間に同相になっている．

2つの空間を十分小さい単体の集まりに分解(三角形分割)することにより，1つの空間から他の空間への任意の連続写像は，各単体上で線形近似される．さらに，この近似された写像は，もとの写像と同じホモトピー類に属する．このようにして，写像に関する位相的に複雑な問題を，より近づきやすい「区分線形」な写像と空間の代数的問題に帰着させることができる．

図4.1はこの考えを示す．この図では，単位区間の2種類の分割と，$f(x)=4x-4x^2$ で定義された関数 $f\colon I\to I$ の区分線形近似を示している．

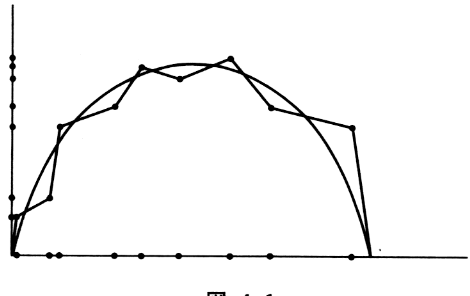


図 4.1

4.1　単体的複体の幾何学

定義　V を R^1 上のベクトル空間とし，C を V の部分集合とする．C が**凸であるとは**，すべての $t\in I$ に対して

$$c_1,\ c_2\in C \Longrightarrow tc_1+(1-t)c_2\in C$$

が成り立つことをいう．

定義　ベクトル空間 V のベクトルの集合 $\{v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_k\}$ が**凸独立**，あるいは **c-独立**であるとは，集合 $\{v_1-v_0,\ v_2-v_0,\ \cdots,\ v_k-v_0\}$ が1次独立であることをいう．この定義はどのベクトルを v_0 とするかにはよらないことに注意せよ．

例　R^2 において，$\{v_0,\ v_1,\ v_2\}$ が c-独立であるための必要十分条件は，$\{v_0,\ v_1,\ v_2\}$ が同一直線上にないことである．

> **定理 1**　$\{v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_k\}$ が c-独立であるとする．C を $\{v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_k\}$ で生成された凸集合とする．すなわち，C を $\{v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_k\}$ を含む最小の凸集合とする．このとき，C は $\sum_{i=0}^{k} a_iv_i$ という形のベクトル全体からなる．ただし，すべての i に対して $a_i\geq 0$ かつ $\sum_{i=0}^{k} a_i=1$ である．さらに，各 $v\in C$ はこの形で一意的に表わせる．

証明　まず凸集合の共通部分は凸集合であることに注意すれば，たしかに C は存在する（C は $\{v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_k\}$ を含むすべての凸集合の共通部分である）．

いま，

$$C_1=\left[v;\ v=\sum_{i=0}^{k} a_iv_i,\ \ a_i\geq 0,\ \ \sum_{i=0}^{k} a_i=1\right]$$

とすると，C_1 は凸である．なぜならば，$v=\sum_{i=0}^{k} a_iv_i,\ w=\sum_{i=0}^{k} b_iv_i$ とすれば，

$$tv+(1-t)w=\sum_{i=0}^{k}\,[ta_i+(1-t)b_i]v_i$$

かつ

$$\sum_{i=0}^{k}\,[ta_i+(1-t)b_i]=t\sum_{i=0}^{k} a_i+(1-t)\sum_{i=0}^{k} b_i=t+(1-t)=1.$$

したがって C_1 は $\{v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_k\}$ を含む凸集合である．これより $C_1\supset C$.

逆に $C_1\subset C$ を証明しよう．たしかに，1つを除いて他のすべての a_i が0であるとき，$\sum_{i=0}^{k} a_iv_i\in C$．帰納法で続けることにする．0でない a_i が高々 n 個

あるときは，常に $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in C$ とする $(n<k+1)$．$\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ が $n+1$ 個の 0 でない a_i をもつとする．（必要ならば番号をつけかえることにより）$a_0, a_1, \cdots, a_n \neq 0$ で，他のすべてに対しては $a_i=0$ と仮定してよい．これより

$$\sum_{i=0}^{k} a_i v_i = (1-a_n) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} v_i + a_n v_n.$$

また，

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} = \frac{1}{1-a_n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{1}{1-a_n}(1-a_n) = 1$$

であるから，帰納法の仮定より $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} v_i \in C$ である．C が凸であることから，$t \in I$ に対して

$$t \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} v_i + (1-t) v_n \in C$$

である．ここで $t=1-a_n$ とおけば $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in C$．すなわち $C_1 \subset C$．したがって $C_1 = C$ がいえた．

次に一意性を示そう．

$$v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i = \sum_{i=0}^{k} b_i v_i, \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i = \sum_{i=0}^{k} b_i = 1$$

とする．このとき

$$0 = \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i) v_i = \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i) v_i - \left(\sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} b_i \right) v_0$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i)(v_i - v_0).$$

$\{v_1 - v_0,\ v_2 - v_0,\ \cdots,\ v_k - v_0\}$ が 1 次独立だから，すべての $i>0$ に対して $a_i - b_i = 0$ である．したがって明らかに $a_0 = b_0$．▒

定義 V を R^1 上のベクトル空間とする．c-独立なベクトル $\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ により生成された凸集合を（**閉**）**k-単体**といい，$[v_0, v_1, \cdots, v_k]$ と書く．k を単体の**次元**という．$v \in [v_0, v_1, \cdots, v_k]$ のとき，$v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i \left(a_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right)$ の係数 a_i を v の**重心座標**という．v に対する a_i を $a_i(v)$ と書く．

例 R^1 のベクトル $\{v_0, v_1\}$ に対して単体 $[v_0, v_1]$ は閉区間 $[v_0, v_1]$ である．$\{v_0, v_1, v_2\} \subset R^2$ に対して $[v_0, v_1, v_2]$ は頂点 v_0, v_1, v_2 をもつ三角形である．この三角形の重心は重心座標 (1/3, 1/3, 1/3) をもつ点である．$V = R^n$ に対して，

単体 $[v_0, v_1, \cdots, v_k]$ は相対位相でコンパクト距離空間（閉かつ有界）である．実際，重心座標を用いると，$[v_0, v_1, \cdots, v_k]$ は k 個の単位区間の積に同相であることが容易にわかる．しかし，この同相写像は等距離写像ではない．

定義　$\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ を c-独立な集合とする．集合

$$[v \in [v_0, v_1, \cdots, v_k]\,;\ a_i(v) > 0,\ i = 0, 1, \cdots, k]$$

を**開単体**といい，$(v_0, v_1, \cdots, v_k)$ と書く．また，開単体を (s) とも書き，対応する閉単体を $[s]$ と書く．

$[s] = [v_0, v_1, \cdots, v_k]$ を閉単体とする．点 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ を $[s]$ の**頂点**という．また，閉単体 $[v_{j_0}, v_{j_1}, \cdots, v_{j_h}]$（$\{j_0, j_1, \cdots, j_h\}$ は $\{0, 1, \cdots, k\}$ の空でない部分集合）を $[s]$ の**閉辺単体**といい，開単体 $(v_{j_0}, v_{j_1}, \cdots, v_{j_h})$ を $[s]$ の**開辺単体**という．

注意

1)　1つの頂点は0次元閉辺単体である．それはまた開辺単体でもある．
2)　開単体 (s) は，閉単体 $[s]$ の開集合である．その閉包は $[s]$ である．
3)　閉単体 $[s]$ は，その開辺単体の和集合である．
4)　単体の異なる開辺単体は互いに交わらない．
5)　開単体 (s) は，閉単体 $[s]$ の内部[1]である．すなわち，閉単体から真の開辺単体（$\neq (s)$）を引いたものである．

定義　（ユークリッド的）**単体的複体** K とは，R^n のある有限個の開単体からなる集合で次の(1)，(2)を満たすものをいう．

（1）　$(s) \in K$ ならば，（$[s]$ のすべての開辺単体）$\in K$．

（2）　$(s_1), (s_2) \in K$ かつ $(s_1) \cap (s_2) \neq \phi$ ならば，$(s_1) = (s_2)$．

K の**次元**とは，K に属する単体のうちの最大次元をいう．

注意　K を単体的複体とする．K の開単体に属する点の和集合を $[K]$ で表わせば，$[K]$ はコンパクトで，$[K] = \bigcup_{(s)\in K} (s) = \bigcup_{(s)\in K} [s]$ である．$[s]$ を閉単体とするとき，その開辺単体の集まりは単体的複体である．これを s と表わす．

例　次の図4.2は単体的複体の例である．

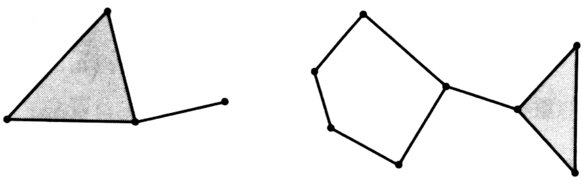


図 4.2

1)［訳注］位相空間の意味での内部ではなく，直観的な意味である．

また，図 4.3 は単体的複体では“ない”.

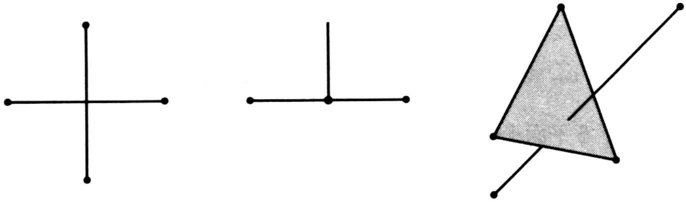


図 4.3

しかし，単体をいくつかつけ加えることにより，図 4.3 の点集合を複体にすることができる(図 4.4).

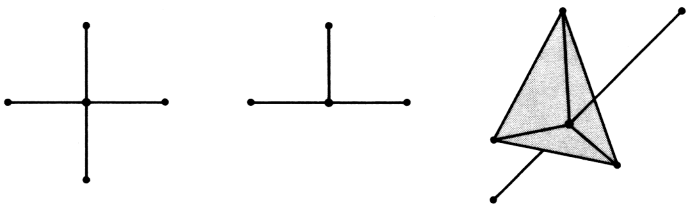


図 4.4

複体は単なる点集合ではないことがわかった．それは構造を付加された集合である．図 4.5 におけるように，同じ点の集合でも，異なった 2 つの複体をもつことも可能である.

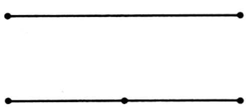


図 4.5

定義　単体的複体 K の**部分複体**とは，$(s) \in L$ ならば $(s) \in K$ であるような単体的複体 L のことである.

注意　各 $(s) \in K$ に対して単体的複体 s は K の部分複体である.

定義　K を複体とする．r を K の次元より小さいかまたは等しい整数とする．K の ***r*-骨格** K^r とは $K^r = [(s) \in K;\ s \text{ の次元} \leq r]$ のことをいう.

注意　r-骨格 K^r は K の部分複体である.

4.2 重心細分

定義 $v \in R^n$, $A \subset R^n$ とする．組 (v, A) が**一般的な位置にある**とは，$v \notin A$ かつ $a_1 \neq a_2$ なる各 $a_1, a_2 \in A$ に対して $[v, a_1] \cap [v, a_2] = \{v\}$ であることをいう．

例 次にあげる平面上の点と集合（図 4.6）は一般的な位置にある．

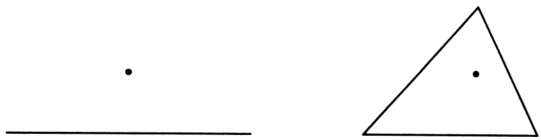


図 4.6

次の点と集合（図 4.7）は一般的な位置に "ない"．



図 4.7

A が内部も含んだ三角形ならば，(v, A) が一般的な位置にあるような $v \in R^2$ は存在しない．

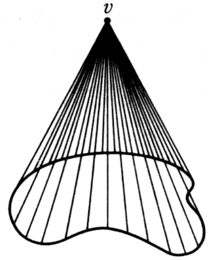


図 4.8

定義 (v, A) が一般的な位置にあるとする．頂点 v と底 A をもつ**錐**（あるいは，v と A との**結**）$v*A$ を，集合

$$v*A = \bigcup_{a \in A} [v, a]$$

と定義する（図 4.8）．

> **定理 1** $[s] = [v_0, v_1, \cdots, v_k]$ を k-単体とする．$v \in (s)$ とすると，$(v, [s^{k-1}])$ は一般的な位置にあり，$v*[s^{k-1}] = [s]$ である．

証明 $a_1, a_2 \in [s^{k-1}]$ とする．$w \neq v$ なる $w \in [v, a_1] \cap [v, a_2]$ が存在したとする．$a_1 = a_2$ を示そう．まず，a_1, a_2, v の $[s]$ における重心座標表示を考える．

$$a_1 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{1i} v_i, \qquad a_2 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{2i} v_i, \qquad v = \sum_{i=0}^{k} \beta_i v_i.$$

$a_1 \notin (s)$，$a_2 \notin (s)$ だから，ある $i_1, i_2 \leq k$ に対して $\alpha_{1i_1} = 0$，$\alpha_{2i_2} = 0$ である．さら

に $v\in(s)$ だから，すべての i に対して $\beta_i\neq 0$ である．また，$w\in[v, a_1]$ より，ある $t_1\in I$ に対して $w=t_1v+(1-t_1)a_1$．したがって $w=\sum_{i=0}^{k}[t_1\beta_i+(1-t_1)\alpha_{1i}]v_i$．同様に，$w\in[v, a_2]$ より，ある $t_2\in I$ に対して $w=\sum_{i=0}^{k}[t_2\beta_i+(1-t_2)\alpha_{2i}]v_i$．重心座標の一意性より，

$$t_1\beta_i+(1-t_1)\alpha_{1i}=t_2\beta_i+(1-t_2)\alpha_{2i} \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ k).$$

ゆえに

$$t_1-t_2=\frac{1}{\beta_i}[(1-t_2)\alpha_{2i}-(1-t_1)\alpha_{1i}].$$

$$i=i_1 \text{ をとれば,} \qquad t_1-t_2=\frac{1}{\beta_{i_1}}(1-t_2)\alpha_{2i_1}\geq 0.$$

$$i=i_2 \text{ をとれば,} \qquad t_1-t_2=-\frac{1}{\beta_{i_2}}(1-t_1)\alpha_{1i_2}\leq 0.$$

したがって，$t_1-t_2=0$，$t_1=t_2$ で，すべての i に対して

$$(1-t_1)\alpha_{1i}=(1-t_1)\alpha_{2i}.$$

さて，$w\neq v$ より $t_1\neq 1$ である．したがって，すべての i に対して $\alpha_{1i}=\alpha_{2i}$ であり，これより $a_1=a_2$ で $(v,\ [s^{k-1}])$ が一般的な位置にあることが証明された．

いま，$[s]$ が凸であることから $v*[s^{k-1}]\subset[s]$．逆に，$[s]\subset v*[s^{k-1}]$ をいおう．$w\in[s^{k-1}]$ ならばたしかに $w\in v*[s^{k-1}]$ である．そこで $w\in(s)$ と仮定する．$w\neq v$ としてよい．重心座標をとると，

$$w=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i v_i, \qquad v=\sum_{i=0}^{k}\beta_i v_i \quad (\text{すべての } \alpha_i,\ \beta_i>0).$$

$$\sum_{i=0}^{k}(\alpha_i-\beta_i)=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i-\sum_{i=0}^{k}\beta_i=1-1=0$$

であり，またある i に対して $\alpha_i-\beta_i\neq 0$ であるから，ある j に対して $\alpha_j-\beta_j<0$．このような各 j について $f_j(t)=\beta_j+t(\alpha_j-\beta_j)$ とおく．$f_j(1)>0$ かつ大なる t に対して $f_j(t)<0$ であるから，$\beta_j+t_j(\alpha_j-\beta_j)=0$ を満たす $t_j>1$ が存在する．そのようなすべての j に対して $t_{i_0}\leq t_j$ となるような i_0 を j の中から選ぶと，$\beta_{i_0}+t_{i_0}(\alpha_{i_0}-\beta_{i_0})=0$ であり，しかもすべての i に対して，$\beta_i+t_{i_0}(\alpha_i-\beta_i)\geq 0$．ゆえに $v+t_{i_0}(w-v)=x\in[s^{k-1}]$（図 4.9 を見よ）．また，

$$w=\frac{1}{t_{i_0}}x+\frac{t_{i_0}-1}{t_{i_0}}v=t^1x+(1-t^1)v, \qquad t^1=\frac{1}{t_{i_0}}<1.$$

これより $w\in v*[s^{k-1}]$ である．▓

問題 $[s]=[v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_k]$ とする．$(v,\ [s])$ が一般的な位置にあるための必要十分条件は，$\{v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_k,\ v\}$ が c-独立であることであり，またそのとき，

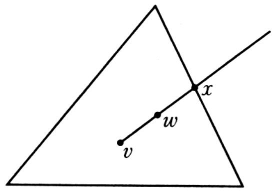


図 4.9

$$v*[s]=[v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_k,\ v]$$

であることを証明せよ.

定義 $[s]$ を k-単体とする. (s) の**重心**とは, 重心座標 $(1/(k+1),\ \cdots,\ 1/(k+1))$をとる (s) の点をいい, $b(s)$ と表わす. すなわち $(s)=(v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_k)$ ならば

$$b(s)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} v_i.$$

K を単体的複体とする. K の**細分**とは, 次の(1), (2)を満たす単体的複体 $K^\dagger$ をいう.

(1) $[K^\dagger]=[K]$,

(2) $(s)\in K^\dagger$ ならば $(s)\subset(K$ のある単体$)$.

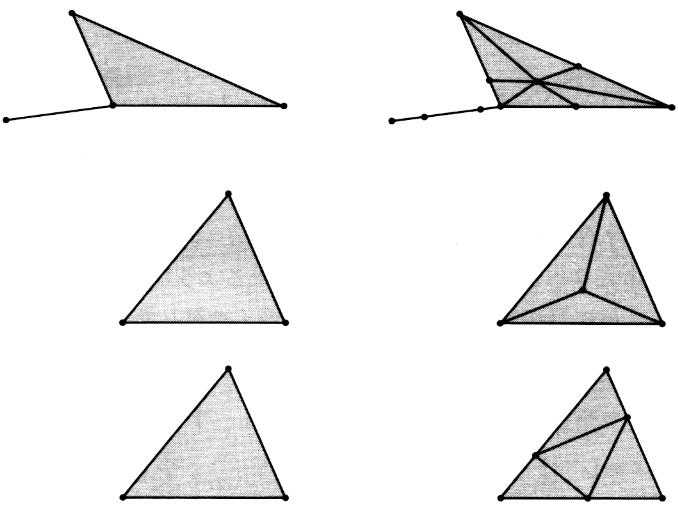


図 4.10

例 図4.10の2列目の各複体は1列目の 各複体の細分である. 2列目の2番目と3番目の複体は同じ点集合をもつが, 互いに他の細分ではないことに注意せよ.

定理 2 $[s]$ を k-単体, $K^\dagger$ を s^{k-1} の細分とする. $v \in (s)$ のとき $(v, [K^\dagger])$ は一般的な位置にある. しかも $v*[K^\dagger]$ は $\tilde{K}=K^\dagger \cup (\bigcup_{s^\dagger \in K^\dagger} (s^\dagger, v)) \cup (v)$ により定義された複体 $\tilde{K}$ の点集合である(図4.11). ここで,

$$(s^\dagger)=(v_0, v_1, \cdots, v_r) \in K^\dagger$$

に対して $(s^\dagger, v)=(v_0, v_1, \cdots, v_r, v)$ である. 複体 $\tilde{K}$ は s の細分である.

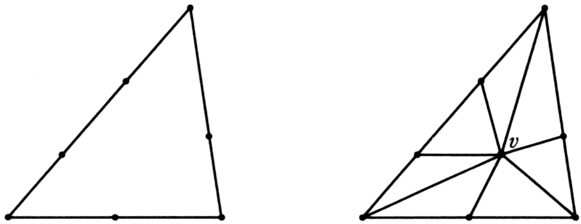


図 4.11

証明 定理1より, $(v, [s^{k-1}])$は一般的な位置にあり, かつ $v*[s^{k-1}]=[s]$ である. ところが $[K^\dagger]=[s^{k-1}]$ であるから $(v, [K^\dagger])$ は一般的な位置にあり, かつ $v*[K^\dagger]=[s]$.

$\tilde{K}$ が単体的複体であることを示す必要がある. $\tilde{K}$ は開単体の集合であり, さらに $\tilde{K}$ の各単体 $\neq (v)$ は $K^\dagger$ に含まれるか, $(s^\dagger, v)$ という形をもつかのいずれかである. もしそれが $K^\dagger$ に含まれるならば, その開辺単体はすべて $K^\dagger$ に含まれ, したがって $\tilde{K}$ に含まれる. また $(s^\dagger, v)$という形ならば, その開辺単体は $s^\dagger$[1], (v) と $[(s_1^\dagger, v)$; $s_1^\dagger$ は $s^\dagger$ の開辺単体$]$ である. このように各場合とも, すべての開辺単体は $\tilde{K}$ に含まれ, したがって複体の条件(1)は満たされる. 複体の条件 (2) を確かめるためには異なる開辺単体は空である共通部分しかもたないことを示さねばならない. このことは, $K^\dagger$は複体だから, $K^\dagger$ の各各の単体の組に対しては, たしかに成り立っている. また, $s^\dagger \in K^\dagger$ ならば, すべての $s_1^\dagger \in K^\dagger$ に対して $(s^\dagger) \cap (s_1^\dagger, v)=\phi$. 実際, $(s_1^\dagger, v) \subset (s)$ である. 明らかに (v) は $\tilde{K}$ の他の開単体とは交わらない, そこで $s_1^\dagger, s_2^\dagger \in K^\dagger$ に対して

1) [訳注] $s^\dagger$ は $(s^\dagger)$ のことである. 以下, 同様の便法を用いる.

$(s_1^\dagger, v)\cap(s_2^\dagger, v)\neq\phi$ と仮定する．$w\in(s_1^\dagger, v)\cap(s_2^\dagger, v)$ とすると，これらは開単体だから $w\neq v$ である．さて $w\in[v, x]$ であるような $x\in[s^{k-1}]=[K^\dagger]$ が一意的に存在する(定理1を見よ)．$[s_1^\dagger, v]=v*[s_1^\dagger]$ より $x\in(s_1^\dagger)$．同様に $x\in(s_2^\dagger)$ より $(s_1^\dagger)\cap(s_2^\dagger)\neq\phi$．したがって $K^\dagger$ が複体であることから，$s_1^\dagger=s_2^\dagger$，$(s_1^\dagger, v)=(s_2^\dagger, v)$．かくして $\tilde{K}$ は複体である．

$\tilde{K}$ の点集合は

$$[\tilde{K}]=\bigcup_{\tilde{s}\in\tilde{K}}[\tilde{s}]=\bigcup_{s^\dagger\in K^\dagger}v*[s^\dagger]=v*[K^\dagger]=[s].$$

$\tilde{K}$ の各開単体は s の開単体に含まれる——$K^\dagger$ は s^{k-1} の細分であるから，$K^\dagger$ の開単体は s の開単体に含まれ，残りは(s)に含まれる——．したがって $\tilde{K}$ は s の細分である．▒

定義　K を単体的複体とする．次のように K 上に半順序が定義される．

$$s_1\leq s_2 \Longleftrightarrow s_1 \text{ は } s_2 \text{ の辺単体である．}$$

記号 $s_1<s_2$ は $s_1\leq s_2$ かつ $s_1\neq s_2$ を意味する．

定理 3　K を単体的複体とする．

$$K^{(1)}=[(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_k)) ; s_0<s_1<\cdots<s_k, s_0, s_1, \cdots, s_k\in K]$$

とすると $K^{(1)}$ は K の細分である．しかも $s_0<s_1<\cdots<s_r$ なる各 $s_0, s_1, \cdots, s_r\in K$ に対して $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r))\subset(s_r)$ である．

注意　細分 $K^{(1)}$ は K の**第1重心細分**とよばれる．くり返しを行なって得られる

$$K^{(n)}=\underbrace{(((K^{(1)})^{(1)})\cdots)^{(1)}}_{n\text{ 回}}$$

は K の**第 n 重心細分**という．

定理3の証明（$\dim K$（K の次元)に関する帰納法）　$\dim K=0$ に関しては $K^{(1)}=K$ だから証明する必要はない．次元 $\leq n-1$ のすべての単体的複体に対して定理が正しいと仮定する．$\dim K=n$ とする．このとき $(n-1)$-骨格 K^{n-1} は次元$\leq n-1$ の複体である．これより K^{n-1} に関しては成り立つ．特に

$$s_0, s_1, \cdots, s_r\in K, \quad s_0<s_1<\cdots<s_r, \quad \text{かつ} \quad \dim s_r\leq n-1$$

ならば，$\{b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r)\}$ は c-独立で，$(K^{n-1})^{(1)}$ の開単体 $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r))$を与える．さらに

$$(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r))\subset(s_r).$$

いま，$s_0, s_1, \cdots, s_r\in K$ $(s_0<\cdots<s_r)$ かつ $\dim s_r=n$ と仮定する．$s_{r-1}<s_r$ より $\dim s_{r-1}\leq n-1$ で，$(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_{r-1}))$ は s_r の辺単体 (s_{r-1}) に

含まれる単体である．$b(s_r)\in(s_r)$ だから，定理1より $(b(s_r), (b(s_0), \cdots, b(s_{r-1})))$ は一般的な位置にあるということがいえる．これより $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r))$ は開単体で，閉単体

$$[b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r)]=b(s_r)*[b(s_0), \cdots, b(s_{r-1})]\subset[s_r]$$

の内部である．したがって $(b(s_0), \cdots, b(s_r))\subset(s_r)$ である．

これで，$K^{(1)}$ が開単体の集まりであるというところまではわかった．実は単体的複体であることがわかる．条件(1)は明らかに満足される．すなわち $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r))$ の任意の辺単体は $(b(s_{j_0}), b(s_{j_1}), \cdots, b(s_{j_h}))$ であり，これより $K^{(1)}$ に属する．さて条件(2)を確かめよう．$s_0<\cdots<s_r$, $\bar{s}_0<\cdots<\bar{s}_q$, かつ

$$(b(s_0), \cdots, b(s_r))\cap(b(\bar{s}_0), \cdots, b(\bar{s}_q))\neq\phi$$

と仮定する．w が共通部分に属するとすれば，$w\in(s_r)\cap(\bar{s}_q)$ である．K は複体だから $s_r=\bar{s}_q$ であり，$b(s_r)=b(\bar{s}_q)$．さらに

$$(b(s_0), \cdots, b(s_{r-1}))\subset(s_{r-1}), \qquad (b(\bar{s}_0), \cdots, b(\bar{s}_{q-1}))\subset(\bar{s}_{q-1}).$$

ここで，(s_{r-1}) と $(\bar{s}_{q-1})$ は両方とも (s_r) の辺単体である．これより

$$(b(s_0), \cdots, b(s_{r-1})), \qquad (b(\bar{s}_0), \cdots, b(\bar{s}_{q-1}))\in {s_r}^{(1)}.$$

$$\begin{aligned} w\in(b(s_0), \cdots, b(s_{r-1}), b(s_r))\cap(b(\bar{s}_0), \cdots, b(\bar{s}_{q-1}), b(s_r)) \\ \subset b(s_r)*(b(s_0), \cdots, b(s_{r-1}))\cap b(s_r)*(b(\bar{s}_0), \cdots, b(\bar{s}_{q-1})) \end{aligned}$$

であるから，定理2と帰納法の仮定により

$$(b(s_0), \cdots, b(s_{r-1}))=(b(\bar{s}_0), \cdots, b(\bar{s}_{q-1})).$$

このことは，$K^{(1)}$ が単体的複体であることを示している．最後に $[K^{(1)}]=[K]$ を示さなければならない．明らかに $[K^{(1)}]\subset[K]$ である．また帰納法の仮定より $[K^{(1)}]\supset[(K^{n-1})^{(1)}]=[K^{n-1}]$ である．したがって

$$[K^{(1)}]\supset[K]-[K^{n-1}]$$

を示せばよい．そこで $w\in[K]-[K^{n-1}]$ と仮定する．このとき w は，次元 n をもつある開単体 (s) に属さなければならない．したがって

$$w\in(s)\subset[s]=b(s)*[s^{n-1}].$$

さて，$[s^{n-1}]\subset[K^{n-1}]=[(K^{n-1})^{(1)}]$ だから，ある

$$(s_1)=(b(s_0), \cdots, b(s_k))\in(K^{n-1})^{(1)}$$

に対して $w\in b(s)*(s_1)$ である．$w=b(s)$ ならば w は $K^{(1)}$ の頂点であり，$w\neq b(s)$ ならば，$w\in(b(s_0), \cdots, b(s_k), b(s))\subset[K^{(1)}]$． ▓

定義 (S, ρ) を距離空間とし，T を S のコンパクト部分集合とする．T の

直径 diam T を

$$\operatorname{diam} T=\sup_{t_1,t_2\in T}\rho(t_1, t_2)$$

と定義する． T はコンパクトで ρ は連続だから最大値が存在する． したがって次のようにも書ける．

$$\operatorname{diam} T=\max_{t_1,t_2\in T}\rho(t_1, t_2).$$

K を R^n における単体的複体とし，R^nには普通の距離が与えられているとする．K の**メッシュ** (mesh) とは，K の単体の最大の直径のことをいう．すなわち

$$\operatorname{mesh} K=\max_{s\in K}\operatorname{diam}[s].$$

補題 s が R^n における単体ならば，s のある頂点 v_1, v_2 に対して $\operatorname{diam}[s]=\rho(v_1, v_2)$ である．また K が単体的複体ならば，K のある単体の頂点 v_1, v_2 に対して $\operatorname{mesh} K=\rho(v_1, v_2)$ である．

証明 s を単体とし， $v_1, v_2\in[s]$ を $\operatorname{diam}[s]=\rho(v_1, v_2)$ であるような点とする． v_2 が頂点でなければ， v_2 は次元 ≥ 1 のある開単体に属する． 特に $w_1\neq w_2$ なる $w_1, w_2\in[s]$ が存在して，$0<t<1$ なるある t に対して

$$v_2=tw_1+(1-t)w_2$$

となる． ところが

$$f(t)=\rho(v_1, tw_1+(1-t)w_2)$$

により I 上で定義された凸関数 f は $0<t<1$ では最大値をもたないので，(v_1, v_2) における ρ の最大性に矛盾する． 補題の後半は mesh K の定義から直ちにいえる． ▮

定理 4 K を m 次元の単体的複体とする． このとき

$$\operatorname{mesh} K^{(1)}\leq[m/(m+1)]\operatorname{mesh} K.$$

特に，$\lim_{n\to\infty}\operatorname{mesh} K^{(n)}=0$ である．

証明 補題より， $s_k<s_h$ で $\operatorname{mesh} K^{(1)}=\rho(b(s_k), b(s_h))$ であるような単体 $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r))\in K^{(1)}$ が存在する． 必要ならば頂点の番号をつけかえることにより， $s_k=(v_0, \cdots, v_p)$, $s_h=(v_0, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots, v_q)$，かつ

$$\begin{aligned}\operatorname{mesh} K^{(1)}&=\|b(s_k)-b(s_h)\|=\left\|\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}v_i-\frac{1}{q+1}\sum_{j=0}^{q}v_j\right\|\\&=\frac{1}{q+1}\left\|\frac{q+1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}v_i-\sum_{j=0}^{q}v_j\right\|=\frac{1}{q+1}\left\|\sum_{j=0}^{q}\left(\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}v_i-v_j\right)\right\|\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{p+1}\frac{1}{q+1}\left\|\sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0}^{p}(v_i-v_j)\right\|\leq\frac{1}{p+1}\frac{1}{q+1}\sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0}^{p}\|v_i-v_j\|.$$

ところが，$\|v_i-v_j\|\leq\mathrm{diam}[s_h]\leq\mathrm{mesh}\,K$ であり，さらに，この和で $i=j$ の場合は第 (i,j) 項$=0$ である．そのような項が $p+1$ 個あるから 0 でない項の個数は

$$(p+1)(q+1)-(p+1)=(p+1)q.$$

和の各項 $\leq\mathrm{mesh}\,K$ で，$q\leq m$ より

$$\mathrm{mesh}\,K^{(1)}\leq\frac{q}{q+1}\mathrm{mesh}\,K\leq\frac{m}{m+1}\mathrm{mesh}\,K. \quad ▒$$

4.3 単体近似定理

定義 K と L を単体的複体とする．写像 φ: $[K]\to[L]$ が**単体写像**であるとは，次の条件(1)，(2)，(3)を満たすことをいう．

(1) K の各頂点 v に対して $\varphi(v)$ は L の頂点である．

(2) 各単体$(v_0, v_1, \cdots, v_k)\in K$ に対して頂点 $\varphi(v_0), \varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_k)$ はすべて L のある1つの閉単体に属する．

(3) 各 $(s)=(v_0, v_1, \cdots, v_k)\in K$ と $p=\sum_{i=0}^{k}a_iv_i\in(s)$ とに対し，p の像は

$$\varphi(p)=\sum_{i=0}^{k}a_i\varphi(v_i)$$

により与えられる．

注意 条件(1)は，「φ は K の 0-骨格を L の 0-骨格に写像する」ということであり，条件(2)は，「各単体 $(v_0, v_1, \cdots, v_k)\in K$ に対して $\varphi(v_0), \varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_k)$ の集合は，重複を許して L のある1つの単体の頂点の集合である」ということである．また条件(3)では，「写像 φ は各単体上で線形である」ことを述べている．

単体写像は $[K]$ と $[L]$ に依存するだけでなく，まさに K と L に依存する．したがって φ: $K\to L$ と書く．

例 図 4.12 における射影は単体写像である．

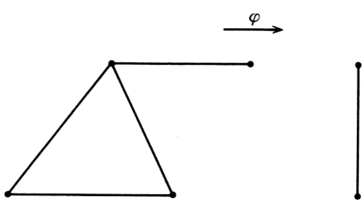


図 4.12

しかしながら図 4.13 における射影は，条件(1)と(3)は満たすが単体写像ではは“ない”.

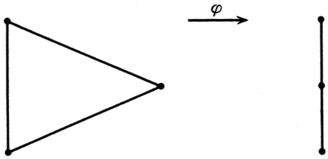


図 4.13

注意 3.1 節の貼合せの補題より，単体写像は連続であることが容易に確かめられる.

条件(3)より，単体写像は頂点の写り方だけで決定される．逆に，K の頂点の集合から L の頂点への「頂点写像」$K^0 \to L^0$ が単体写像 $K \to L$ に拡張できるための必要十分条件は，(2)が満たされることである.

定義 K を単体的複体とし，v を K の頂点とする．v の**星状体** $\mathrm{St}(v)$ とは，点集合

$$\mathrm{St}(v) = \bigcup_{\substack{v \in [s] \\ (s) \in K}} (s)$$

をいう.

> **定理 1** K を単体的複体とする．K の頂点 v に対して，$\mathrm{St}(v)$ は v を含む $[K]$ の開集合であり，v は $\mathrm{St}(v)$ に属する K のただ1つの頂点である．$\{\mathrm{St}(v)\}_{v \in K^0}$ は $[K]$ の開被覆である.

証明 $[K]$ における $\mathrm{St}(v)$ の補集合は閉であることを示そう.

$$\mathrm{St}(v)' = \bigcup_{v \notin [s]} (s)$$

$v \notin [s]$ より v は s の辺単体の元ではない．したがって $(s) \subseteq \mathrm{St}(v)'$ ならば $[s] \subseteq \mathrm{St}(v)'$ である．$[s]$ はコンパクトであるから $[s]$ は閉である．これより $\mathrm{St}(v)' = \bigcup_{(s) \subset \mathrm{St}(v)'} [s]$ は閉である.

次に，頂点を含むただ1つの開単体はその頂点だけからなる 0-単体だから，$\mathrm{St}(v)$ における唯一の頂点は v である.

最後に，$p \in [K]$ ならば，ある $(s) \in K$ に対して $p \in (s)$ であり，このことから(s)の頂点 v に対して $p \in \mathrm{St}(v)$．したがって $\bigcup_{v \in K^0} \mathrm{St}(v) = [K]$. ∎

定義 K と L を単体的複体とする．f: $[K] \to [L]$ を連続とする．単体写

像 φ: $K \to L$ が f の**単体近似**であるとは，K の各頂点 v に対して $f(\mathrm{St}(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v))$ であることをいう．

> **定理 2** φ: $K \to L$ が f: $[K] \to [L]$ の単体近似であるとする．このとき，任意の $p \in [K]$ に対して $f(p)$ と $\varphi(p)$ は $[L]$ における同一の閉単体に属する．

証明 $p \in [K]$ とする．このときある単体 $(s) = (v_0, v_1, \cdots, v_r) \in K$ に対して $p \in (s)$ であり，かつすべての $j \in \{0, 1, \cdots, r\}$ に対して

$$f(p) \in f((s)) \subset f(\mathrm{St}(v_j)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v_j)).$$

さて，ある単体 $(t) \in L$ に対して $f(p) \in (t)$ だから，(t)に対し $(t) \cap \mathrm{St}(\varphi(v_j)) \neq \phi$ がすべての j についていえる．ところが L は複体で $\mathrm{St}(\varphi(v_j))$ は開単体の和集合であるから，すべての j に対して $(t) \subset \mathrm{St}(\varphi(v_j))$ である．すなわち，すべての j に対して $\varphi(v_j)$ は(t)の頂点である．s における重心座標を考えれば，$p = \sum_{j=0}^{r} a_j v_j$ であり，かつ

$$\varphi(p) = \sum_{j=0}^{r} a_j \varphi(v_j) \in [t].$$

これより証明された．▮

> **系** φ: $K \to L$ が f: $[K] \to [L]$ の単体近似であるとき
>
> $$d(f, \varphi) \leq \mathrm{mesh}\, L, \quad \text{ただし } d(f, \varphi) = \sup_{p \in [K]} \rho(f(p), \varphi(p)).$$

> **定理 3** φ を f: $[K] \to [L]$ の単体近似とする．K_1 を K の部分複体とし，f の $[K_1]$ への制限が単体写像であるとする．このとき，f と φ との間のホモトピーで $[K_1]$ 上で不変であるものが存在する．

証明 F: $[K] \times I \to [L]$ を

$$F(p, t) = t\varphi(p) + (1-t) f(p)$$

により定義する．定理 2 より，$f(p)$ と $\varphi(p)$ が凸集合である同一の単体に属し，それらを結ぶ線分もまたその単体に属すことから，F が $[L]$ への写像で“ある”ことがいえる．F が連続であり，すべての $p \in [K]$ に対して $F(p, 0) = f(p)$ かつ $f(p, 1) = \varphi(p)$ であることは容易に確かめられる．F が $[K_1]$ 上で不変だということは，次の補題から $\varphi|_{[K_1]}$ が $f|_{[K_1]}$ の単体近似（各頂点 $v \in K_1$ について $f(\mathrm{St}_{K_1}(v)) \subset f(\mathrm{St}_K(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v))$ だから）であることからわかり，

したがって $f=\varphi$ が $[K_1]$ で成り立つ. ▓

> **補題** $f\colon K\to L$ が単体写像で, φ が f の単体近似ならば $\varphi=f$ である.

証明 各頂点 $v\in K$ に対して

$$f(v)\in f(\mathrm{St}(v))\subset \mathrm{St}(\varphi(v))$$

である. ところが, f が単体写像だから $f(v)$ は頂点であり, 定理1より $f(v)=\varphi(v)$. このように f と φ は各頂点で一致し, 両者が単体写像であることから, 至るところで一致する. ▓

> **定理 4** $f\colon[K]\to[L]$ は連続で, $\varphi\colon K^0\to L^0$ は頂点写像であるとする. φ が f の単体近似に拡張されるための必要十分条件は, すべての $v\in K^0$ に対して $f(\mathrm{St}(v))\subset \mathrm{St}(\varphi(v))$ が成り立つことである.

証明 必要であることは明らかである. 十分であることをいうには, φ が単体写像 $K\to L$ に拡張されることを確かめればよい. すなわち, $(s)=(v_0, v_1, \cdots, v_r)$ が K における単体ならば, $\varphi(v_0), \varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_r)$ が L の同一の単体の頂点であることを示せばよい. ところが, すべての $j\in\{0, 1, \cdots, r\}$ に対して $f((s))\subset f(\mathrm{St}(v_j))\subset \mathrm{St}(\varphi(v_j))$ だから $\bigcap_{j=0}^{r}\mathrm{St}(\varphi(v_j))\neq\phi$. これより, すべての j に対してある開単体 $(t)\subset\mathrm{St}(\varphi(v_j))$ が存在する. したがって, すべての j に対して, $\varphi(v_j)$ は (t) の頂点でなければならない. ▓

> **定理 5** $f\colon[K]\to[L]$ を連続とする. $\{K_n\}$ を $\lim_{n\to\infty}\mathrm{mesh}\,K_n=0$ なる K の細分の列とする. このとき, 十分大きな n に対して φ が f の単体近似となるような単体写像 $\varphi\colon K_n\to L$ が存在する.

証明 定理1より, $\{\mathrm{St}(w)\}_{w\in L^0}$ は $[L]$ の開被覆である. f が連続だから, $\{f^{-1}(\mathrm{St}(w))\}_{w\in L^0}$ は $[K]$ の開被覆である. $[K]$ はコンパクト距離空間だから半径 δ の任意の球体がこの被覆のある開集合に含まれるように $\delta>0$ をとることができる. $\mathrm{mesh}\,K_n<\delta/2$ となるように十分大きな n を選べば, 各 $s\in K_n$ に対して $\mathrm{diam}[s]\leq\delta/2$. ゆえに, K_n の各頂点 v に対して $\mathrm{St}(v)\subset B_v(\delta)$. ところがある $w\in L^0$ に対して $B_v(\delta)\subset f^{-1}(\mathrm{St}(w))$ であるから, 各 $v\in(K_n)^0$ に対してある $w\in L^0$ をとれば $\mathrm{St}(v)\subset f^{-1}(\mathrm{St}(w))$. そのような頂点 $w\in L^0$ を $\varphi(v)$ とすれば(w は有限個だけ存在する. 任意の1つをとれ), $\varphi\colon(K_n)^0\to L^0$ は $\mathrm{St}(v)\subset f^{-1}(\mathrm{St}(\varphi(v)))$ を満たす. すなわち, 各 $v\in(K_n)^0$ に対して $f(\mathrm{St}(v))\subset\mathrm{St}(\varphi(v))$. したがって, 定理4より φ は f の単体近似に拡張される. ▓

系　$f\colon [K] \to [L]$ を連続とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して K の細分 K_n と L の細分 L_m，および $d(f, \varphi) < \varepsilon$ であるような f の単体近似 $\varphi\colon K_n \to L_m$ が存在する．

証明　4.2節の定理4より，任意に小さなメッシュをもつ細分が存在する．与えられた $\varepsilon > 0$ に対して細分 L_m を mesh $L_m < \varepsilon$ であるようにとる．このとき，$f\colon [K] \to [L_m]$ である．定理5より，K の細分 K_n と f の単体近似 $\varphi\colon K_n \to L_m$ が存在し，定理2の系から，

$$d(f, \varphi) \leq \text{mesh } L_m < \varepsilon. \quad ▩$$

4.4　単体的複体の基本群

定義　K と L を単体的複体とする．$\varphi_1, \varphi_2\colon K \to L$ を単体写像とする．φ_1 と φ_2 が**隣接する**とは，各単体 $(v_0, v_1, \cdots, v_k) \in K$ に対して

$$\varphi_1(v_0), \varphi_1(v_1), \cdots, \varphi_1(v_k) \quad \text{と} \quad \varphi_2(v_0), \varphi_2(v_1), \cdots, \varphi_2(v_k)$$

が t の頂点であるような単体 $t \in L$ が存在することである．

例　K を頂点 $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ をもつ3次元単体の複体とする．L を図4.14のような3つの頂点 $\{w_0, w_1, w_2\}$ と，2つの1-単体 (w_0, w_1), (w_1, w_2) をもつ1次元複体とする．

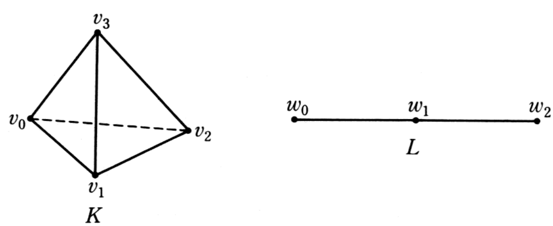


図 4.14

単体写像 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\colon K \to L$ を次のような頂点の対応により定義する．

$$\varphi_1(v_0) = \varphi_1(v_1) = w_0, \qquad \varphi_1(v_2) = \varphi_1(v_3) = w_1$$

$$\varphi_2(v_0) = \varphi_2(v_1) = \varphi_2(v_2) = \varphi_2(v_3) = w_1$$

$$\varphi_3(v_0) = w_2, \qquad \varphi_3(v_1) = \varphi_3(v_2) = \varphi_3(v_3) = w_1.$$

φ_1 と φ_2 が隣接し，φ_2 と φ_3 が隣接することは容易にわかる．しかし φ_1 と φ_3 は隣接しない．したがって，隣接するという性質は同値関係ではない．

定義　単体写像 φ, ψ: $K \to L$ が**隣接同値**であるとは，$\varphi_0=\varphi$, $\varphi_k=\psi$ で，各 $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ について φ_i が φ_{i-1} に隣接するような単体写像 $K \to L$ の有限列 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k$ が存在することをいう．この関係を $\overset{\mathrm{C}}{\simeq}$ で表わす．

注意　$\overset{\mathrm{C}}{\simeq}$ は同値関係である．

定理 1　K と L を単体的複体とし f: $[K] \to [L]$ とする．φ_1, φ_2: $K \to L$ がともに f の単体近似であるならば φ_1 と φ_2 は隣接する．

証明　$(s)=(v_0, \cdots, v_k)$ を K の単体とする．このとき，すべての $j \in \{0, \cdots, k\}$ と $i \in \{1, 2\}$ について

$$f((s)) \subset f(\mathrm{St}(v_j)) \subset \mathrm{St}(\varphi_i(v_j)).$$

したがって

$$f((s)) \subset \bigcap_{j=0}^{k} \mathrm{St}(\varphi_1(v_j)) \cap \bigcap_{j=0}^{k} \mathrm{St}(\varphi_2(v_j)).$$

(t) を $f((s)) \cap (t) \neq \phi$ であるような L の開単体とする．このとき

$$(t) \subset \bigcap_{j=0}^{k} \mathrm{St}(\varphi_1(v_j)) \cap \bigcap_{j=0}^{k} \mathrm{St}(\varphi_2(v_j)).$$

よって $\varphi_1(v_0), \cdots, \varphi_1(v_k)$ および $\varphi_2(v_0), \cdots, \varphi_2(v_k)$ は (t) の頂点である．■

定理 2　φ_1, φ_2: $K \to L$ を互いに隣接する単体写像とする．このとき，φ_1 と φ_2 はホモトピックである．

証明　まず，各 $p \in [K]$ に対して，$\varphi_1(p)$ と $\varphi_2(p)$ は L の同一の単体に属している．$p \in (s)=(v_0, \cdots, v_k) \in K$ とすれば，重心座標に関して $p=\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$. φ_1, φ_2 は互いに隣接することから $\varphi_1(v_0), \cdots, \varphi_1(v_k)$ と $\varphi_2(v_0), \cdots, \varphi_2(v_k)$ は L のある単体 (t) の頂点である．よって $j \in \{1, 2\}$ に対して $\varphi_j(p)=\sum_{i=0}^{k} a_i\varphi_j(v_i) \in [t]$. いま，$F$: $[K] \times I \to [L]$ を

$$F(p, t)=(1-t)\varphi_1(p)+t\varphi_2(p) \qquad (p \in [K],\ t \in I)$$

により定義する．各 $p \in K$ に対して，$\varphi_1(p)$ と $\varphi_2(p)$ は同一の単体に属し，したがってそれらを結ぶ線分もその単体に属するから，この定義は意味をもつ．この F が φ_1 から φ_2 へのホモトピーである．■

系　隣接同値な単体写像はホモトピックである．

定理 3 K を単体的複体とする. α_0, α_1: $I \to [K]$ を $[K]$ の中の道とする. $\alpha_0 \simeq \alpha_1$ ならば, I の細分 I' と単体写像 φ_0, φ_1: $I' \to K$ が存在し,

(1) φ_j は α_j ($j \in \{0, 1\}$) の単体近似である,

(2) $\varphi_0 \overset{C}{\simeq} \varphi_1$

が成り立つ. このとき与えられた I の任意の細分(単体による)に対して, より「細かい」細分 I' を選ぶことができる.

注意 もっと一般に, K と L が2つの単体的複体で,

$$f_0, f_1\colon [K] \to [L]$$

がホモトピックな写像ならば, K の細分 K' と, 上の条件(1), (2)を満たす単体写像 φ_0, φ_1: $K' \to L$ が存在する. この証明は次の証明を一般化して得られる.

定理3の証明 F: $I \times I \to [K]$ を α_0 から α_1 へのホモトピーとする. $\{\mathrm{St}(w)\}_{w \in K^0}$ は $[K]$ の開被覆だから $\{F^{-1}(\mathrm{St}(w))\}_{w \in K^0}$ は $I \times I$ の開被覆である. また $I \times I$ はコンパクト距離空間であるから, $\delta > 0$ が存在して, 半径 δ の各球体はある $w \in K^0$ に対して $F^{-1}(\mathrm{St}(w))$ に含まれるようにできる.

頂点 $v_0 = 0, v_1, \cdots, v_s = 1$ をもつ I の細分 I' と, 頂点 $l/2^k$ ($l = 0, \cdots, 2^k$) をもつ別の細分 I'' をとる. このとき $I' \times I''$ は, 頂点 $v_r^l = (v_r, l/2^k)$ と, 2-単体 $(v_r^l, v_{r+1}^l, v_{r+1}^{l+1})$ または $(v_r^l, v_r^{l+1}, v_{r+1}^{l+1})$ をもつ単体的複体 M をつくる(図 4.15).

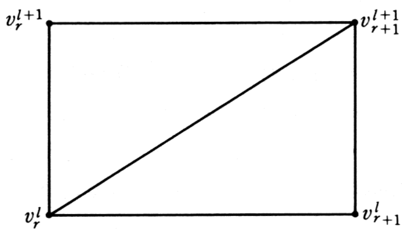


図 4.15

細分を十分細かく選べば, $\mathrm{St}(v_r) \times [(l-1)/2^k, (l+1)/2^k]$ が半径 δ の球体内に含まれ, したがって, ある $w \in K^0$ に対して $F^{-1}(\mathrm{St}(w))$ に含まれる. $\mathrm{St}(v_r^l) \subset \mathrm{St}(v_r) \times [(l-1)/2^k, (l+1)/2^k] \subset F^{-1}(\mathrm{St}(w))$ より, 4.3 節の定理 4 を用いれば F の単体近似である単体写像 Φ: $M \to K$ が存在し,

$$\mathrm{St}(v_r) \times [(l-1)/2^k, (l+1)/2^k] \subset F^{-1}(\mathrm{St}(\Phi(v_r^l))).$$

$\varphi_i = \Phi|_{I \times \{i\}}$ ($i = 0, 1$) とすれば, φ_i は $F|_{I \times \{i\}} = \alpha_i$ の単体近似である.

さて, $\varphi_0 \overset{C}{\simeq} \varphi_1$ を示そう. $\psi_l = \Phi|_{I \times l/2^k}$ とすると, $\psi_0 = \varphi_0$ かつ $\psi_{2^k} = \varphi_1$. ψ_l と ψ_{l+1} が $l = 0, \cdots, 2^k - 1$ に対して互いに隣接することを示せば十分である. す

なわち各単体 $(v_r, v_{r+1}) \in I'$ に対して，頂点

$$\phi_l(v_r)=\Phi(v_r^l),\quad \phi_l(v_{r+1})=\Phi(v_{r+1}^l),\quad \phi_{l+1}(v_r)=\Phi(v_r^{l+1}),\quad \phi_{l+1}(v_{r+1})=\Phi(v_{r+1}^{l+1})$$

が K の1つの単体に属していることを示す．ところが

$$\bigcap_{i,j=0}^{1}\mathrm{St}(\Phi(v_{r+i}^{l+j}))\supset F\left(\mathrm{St}(v_r)\times\left[\frac{l}{2^k},\ \frac{l+1}{2^k}\right]\right)\cap F\left(\mathrm{St}(v_{r+1})\times\left[\frac{l}{2^k},\ \frac{l+1}{2^k}\right]\right)$$

$$\supset F\left((v_r,\ v_{r+1})\times\left[\frac{l}{2^k},\ \frac{l+1}{2^k}\right]\right)$$

であり，これは ϕ でないから，K の単体 (t) に含まれる．したがって，問題となった4つの頂点は (t) の頂点である． ▒

定義 K を単体的複体とする．K の**稜**とは，K の頂点の順序対 $e=|v_1v_2|$ で，v_1, v_2 が K のある単体に属するようなものである．v_1 を e の**始点**，v_2 を e の**終点**という．$e=|v_1v_2|$ ならば稜 $|v_2v_1|$ は e^{-1} と表わされる．K における**順路**とは，各 $i\in\{1, \cdots, k-1\}$ に対して e_i の終点と e_{i+1} の始点が一致するような K の稜の有限列 $\omega=e_1e_2\cdots e_k$ のことである．ω の**始点**を e_1 の始点，ω の**終点**を e_k の終点とする．2つの順路 $\omega=e_1e_2\cdots e_k$, $\tau=e_1'\cdots e_m'$ に対して，ω の終点と τ の始点が等しいときは，**積** $\omega\tau$ が次のように定義される．

$$\omega\tau=e_1\cdots e_ke_1'\cdots e_m'.$$

順路 $\omega=e_1\cdots e_k$ の**逆**とは，順路

$$\omega^{-1}=e_k^{-1}\cdots e_1^{-1}$$

のことである．K の順路全体に対して，同値関係を次のように定義する．$e=|v_1v_2|$，$f=|v_2v_3|$ で，v_1, v_2, v_3 が1つの単体の頂点であるとき，積 ef は，稜 $|v_1v_3|$ に**稜同値**であるという．順路 ω にこれをくり返し用いて順路 τ が得られるとき，ω と τ は**稜同値**であるといい，$\omega\overset{\mathrm{E}}{\simeq}\tau$ と表わす．

例 K を図4.16に示す複体とする．このとき，

$$|v_0v_1||v_1v_2|\overset{\mathrm{E}}{\simeq}|v_0v_2|\overset{\mathrm{E}}{\simeq}|v_0v_3||v_3v_2|.$$

したがって，

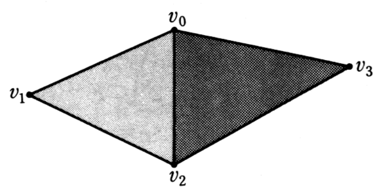


図 4.16

$$|v_0v_1||v_1v_2| \overset{\mathrm{E}}{\simeq} |v_0v_3||v_3v_2|.$$

注意 稜同値は同値関係である．さらに，ω が始点を v とする順路ならば，$\omega\omega^{-1} \overset{\mathrm{E}}{\simeq} |vv|$ である．また $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が1つの単体の頂点ならば，$|v_1v_2||v_2v_3|\cdots|v_{k-1}v_k| \overset{\mathrm{E}}{\simeq} |v_1v_k|$.

> **定理 4** K を単体的複体，v_0 を K の頂点とする．$E(K, v_0)$ を，v_0 を始点および終点とする K の順路の稜同値類の集合とする．このとき $E(K, v_0)$ は群をなし，単位元は $|v_0v_0|$．積の演算と逆元は上で定義したものである．$E(K, v_0)$ は (K, v_0) の**稜道群**とよばれる．

証明 定石どおり．

定義 複体 K の稜道群は純粋に「組合せ的」なものである．すなわち，それは K の頂点とその部分集合（各単体の頂点全体の集合）の集まりのみに依存しており，その定義には空間 $[K]$ の位相的性質は用いられていない．

まず，「抽象」複体を厳密に定義する．V を有限集合とし，その元を頂点とよぶことにする．A を V の部分集合のある集まりとし，A の元を（抽象）単体とよぶ．A が次の(1)，(2)を満たすとき，A を**抽象複体**という．

（1） $v \in V$ ならば，$\{v\} \in A$,

（2） $S \in A$ ならば，S の空でない各部分集合は A に属する．

単体的複体は抽象複体を決定し，逆に，抽象複体 A は，単体的複体として「実現」される，すなわち，抽象複体が A であるような単体的複体が存在することが示される．しかしながら，各抽象複体は多くの(等距離的でない)単体的複体に対応する．

さて，稜道群は抽象複体 A に対しても，A の任意の実現に対する稜道群として定義される．$E(K, v_0)$ が純粋に組合せ的であるといったのはこの意味である．またそれとは対照的に，複体のメッシュは組合せ的概念では“ない”.

> **定理 5** K を単体的複体，v_0 を K の頂点とする．このとき $E(K, v_0)$ は，$\pi_1([K], v_0)$ と同型である．

証明 同型写像 $h: E(K, v_0) \to \pi_1([K], v_0)$ を次のように構成する．ω を，v_0 を始点および終点とする K の順路とする．このとき K の頂点のある集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ に対して，$\omega = |v_0v_1||v_1v_2|\cdots|v_{k-1}v_k|$（ただし $v_k = v_0$）．さて区間 I を，頂点 $\{0, 1/k, 2/k, \cdots, (k-1)/k, 1\}$ をもつ単体的複体とみなす．$\varphi_\omega(j/k) = v_j$ $(j \in \{0, 1, \cdots, k\})$ により定義された頂点写像 $\varphi_\omega: I^0 \to K^0$ を考

える．$|v_0v_1|\cdots|v_{k-1}v_k|$ は順路であるから φ_ω は単体写像 $\varphi_\omega\colon I\to K$ に拡張できる．ここで $h(\omega)=\langle\varphi_\omega\rangle$ とおく．

$\omega\overset{\mathrm{E}}{\simeq}\tau$ ならば $\varphi_\omega\simeq\varphi_\tau$．したがって $h(\omega)=h(\tau)$ であり，h は定義可能である．この h は準同型写像である．実際，$\omega=e_1\cdots e_k$ と $\tau=e_1'\cdots e_m'$ が，v_0 を始点および終点とする順路であれば，$\varphi_{\omega\tau}$ と $\varphi_\omega\varphi_\tau$ の間のホモトピーは図 **4.17** から得られる．

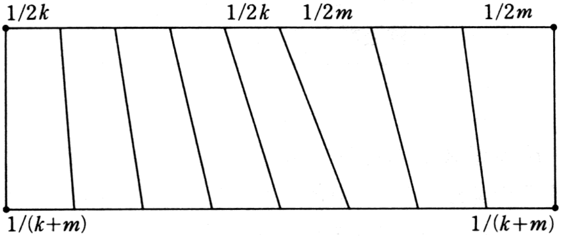


図 4.17

h は“全射”である．なぜなら，$\langle\alpha\rangle\in\pi_1([K],v_0)$ とすれば，単体近似定理より I の細分 I' と α の単体近似 $\varphi\colon I'\to K$ が存在し，$\varphi\simeq\alpha$．したがって $\langle\varphi\rangle=\langle\alpha\rangle$．ここで $t_0<t_1<\cdots<t_k$ を I' の頂点とし，ω を K の順路 $|\varphi(t_0)\varphi(t_1)||\varphi(t_1)\varphi(t_2)|\cdots|\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)|$ とすると

$$h(\omega)=\langle\varphi\rangle=\langle\alpha\rangle.$$

h は“単射”である．これをいうためには，ω が $\varphi_\omega\simeq e_{v_0}$ なる順路ならば $\omega\overset{\mathrm{E}}{\simeq}|v_0v_0|$ であることを示さねばならない．ところが定理 **3** より，I の細分 I' と単体写像 $\varphi_0,\varphi_1\colon I'\to K$ が存在し，φ_0,φ_1 はそれぞれ φ_ω, e_{v_0} の単体近似であり，$\varphi_0\overset{\mathrm{C}}{\simeq}\varphi_1$ を満たすようにできる（この細分 I' は，φ_ω を定義するのに用いた I の細分より細かく選べる）．e_{v_0} は単体写像であり，φ_1 はそれの単体近似であるから $\varphi_1=e_{v_0}$．このとき

$$\omega\overset{\mathrm{E}}{\simeq}|v_0v_0|$$

を示すためには，次の(1)，(2)を証明すれば十分である．

（1）　φ と ψ が隣接同値な単体写像 $I'\to K$ ならば，$\omega_\varphi\overset{\mathrm{E}}{\simeq}\omega_\psi$．ただし，$\omega_\varphi$ と ω_ψ はそれぞれ φ と ψ によりつくられた順路である．

（2）　$\psi\colon I\to K$ が単体写像で，$\varphi\colon I'\to K$ が I のより細かい細分 I' における ψ の単体近似ならば $\omega_\psi\overset{\mathrm{E}}{\simeq}\omega_\varphi$ である．

なぜならば，(2)より $\omega=\omega_{\varphi_\omega}\overset{\mathrm{E}}{\simeq}\omega_{\varphi_0}$，(1)より

$$\omega_{\varphi_0}\overset{\mathrm{E}}{\simeq}\omega_{\varphi_1}=\omega_{e_{v_0}}=|v_0v_0|$$

がいえるからである.

(1)の証明　$\overset{E}{\simeq}$ は同値関係だから，隣接する単体写像についてのみ証明すれば十分である．そこで φ, ψ: $I' \to K$ が互いに隣接するとしよう．

$$\omega_\varphi = |\varphi(t_0)\varphi(t_1)||\varphi(t_1)\varphi(t_2)|\cdots|\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)|$$
$$\omega_\psi = |\psi(t_0)\psi(t_1)||\psi(t_1)\psi(t_2)|\cdots|\psi(t_{k-1})\psi(t_k)|$$

ゆえに

$$\omega_\varphi\omega_\psi^{-1} = |\varphi(t_0)\varphi(t_1)|\cdots|\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)||\psi(t_k)\psi(t_{k-1})|\cdots|\psi(t_1)\psi(t_0)|.$$

ところが，φ と ψ は隣接するから，$\varphi(t_{k-1})$，$\varphi(t_k)$，$\psi(t_{k-1})$，$\psi(t_k)$ は同一の単体の頂点である．しかも $\varphi(t_k)=\psi(t_k)=v_0$．したがって

$$|\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)||\psi(t_k)\psi(t_{k-1})| \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_{k-1})\psi(t_{k-1})|$$

ゆえに

$$\omega_\varphi\omega_\psi^{-1} \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_0)\varphi(t_1)|\cdots|\varphi(t_{k-2})\varphi(t_{k-1})||\varphi(t_{k-1})\psi(t_{k-1})||\psi(t_{k-1})\psi(t_{k-2})| \cdots|\psi(t_1)\psi(t_0)|.$$

同様に，φ と ψ が隣接するから

$$|\varphi(t_{k-2})\varphi(t_{k-1})||\varphi(t_{k-1})\psi(t_{k-1})| \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_{k-2})\psi(t_{k-1})|$$
$$|\varphi(t_{k-2})\psi(t_{k-1})||\psi(t_{k-1})\psi(t_{k-2})| \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_{k-2})\psi(t_{k-2})|.$$

したがって

$$\omega_\varphi\omega_\psi^{-1} \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_0)\varphi(t_1)|\cdots|\varphi(t_{k-3})\varphi(t_{k-2})||\varphi(t_{k-2})\psi(t_{k-2})||\psi(t_{k-2})\psi(t_{k-3})| \cdots|\psi(t_1)\psi(t_0)|.$$

この方法をくり返せば，

$$\omega_\varphi\omega_\psi^{-1} \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_0)\psi(t_0)| = |v_0v_0|.$$

(2)の証明　ψ を I' の（I の頂点 $\{t_0, t_1, \cdots, t_k\}$ からなる）部分複体へ制限したものは単体写像である．よって $i \in \{0, 1, \cdots, k\}$ に対して $\varphi(t_i)=\psi(t_i)$．さらに，ψ: $I \to K$ は単体写像であるから，$(\psi(t_i, t_{i+1}))$ は 0 次元か 1 次元の K の単体(s)である．

「$t_i < u < t_{i+1}$ である I' の各頂点 u に対して $\varphi(u)$ は(s)の頂点である.」実際 φ が ψ の単体近似であるから

$$\psi(u) \in \psi(\mathrm{St}_{I'}(u)) \subset \mathrm{St}_K(\varphi(u)).$$

$\psi(u) \in$ (s) より (s)$\cap \mathrm{St}(\varphi(u)) \neq \phi$ であり，したがって (s)$\subset \mathrm{St}(\varphi(u))$ かつ $\varphi(u)$ は (s)の 1 つの頂点，すなわち，$\varphi(u)$ は $\psi(t_i)$ かまたは $\psi(t_{i+1})$ に等しい.

このように，$u_0 = t_i < u_1 < \cdots < u_r = t_{i+1}$ が t_i と t_{i+1} の間の I' の頂点ならば，$\{\varphi(u_0), \varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_r)\}$ は K の同一の単体の頂点である．$\varphi(u_0)=$

$\varphi(t_i)=\psi(t_i)$ から，$\varphi(u_0)$ は(s)の頂点，同様に $\varphi(u_r)$ は(s)の頂点である．

さて，ψ, φ を $[t_i, t_{i+1}]$ へ制限した $\omega_\psi, \omega_\varphi$ の一部分を考えよう．ω_ψ のこの部分はちょうど $|\psi(t_i)\psi(t_{i+1})|$ であり，ω_φ に対応する部分は，

$$|\varphi(u_0)\varphi(u_1)||\varphi(u_1)\varphi(u_2)|\cdots|\varphi(u_{r-1})\varphi(u_r)|$$

である．$\{\varphi(u_0), \cdots, \varphi(u_r)\}$ は K の同一の単体の頂点だから，この後の部分は $|\varphi(u_0)\varphi(u_r)|=|\varphi(t_i)\varphi(t_{i+1})|=|\psi(t_i)\psi(t_{i+1})|$ に稜同値である．したがって ω_ψ と ω_φ のこれらの部分は稜同値である．これが各 i についていえるので，$\omega_\psi \overset{\mathrm{E}}{\simeq} \omega_\varphi$ がいえる．▩

系　K を単体的複体とし，$v_0 \in K^0$ とする．i: $K^2 \to K$ を K の 2-骨格から K への包含写像とすれば，i は，同型写像

$$i_*:\ E(K^2, v_0) \to E(K, v_0)$$

をひきおこす．その結果，誘導された写像

$$i_*:\ \pi_1([K^2], v_0) \to \pi_1([K], v_0)$$

は同型写像である．

証明　稜同値の定義は K^2 のみに依存する．▩

定理 6　n-球面 $S^n(n>1)$ は単連結である．すなわち，各 $p \in S^n$ に対して $\pi_1(S^n, p)=(e)$ である．

証明　まず，S^n は $(n+1)$-単体の n-骨格に同相である．実際，s が R^{n+1} の $(n+1)$-単体ならば，次にあげる写像 φ: $[s^n] \to R^{n+1}$ は $[s^n]$ を $S^n \subset R^{n+1}$ の上に同相に写す．$x=(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in [s^n]$ に対して

$$\varphi(x)=\frac{1}{\left[\sum_{i=0}^{n+1}(x_i-b_i)^2\right]^{1/2}}(x_1-b_1, x_2-b_2, \cdots, x_{n+1}-b_{n+1}).$$

ただし，$b=(b_1, \cdots, b_{n+1}) \in R^{n+1}$ を s の重心とする．幾何学的には，$[s]$ は S^n 内に描かれているとみなすことができ，φ は $[s]$ の重心から外側へ向けた射影である．

最後に $\pi_1([s^n], v_0)=(e)$ を示せば十分である．定理 **5** より，$\pi_1([s^n], v_0)$ のあらゆる元は順路による表現 α をもち，特にその像は $[s^1]$ に含まれる．$n>1$ のときは $p \notin [s^1]$ なる点 $p \in [s^n]$ が存在する．ところが $[s^n]-\{p\}$ は R^n と同相で可縮である．ゆえに $\alpha \simeq e_{v_0}$ である．▩

定義　**グラフ**とは次元 <2 の単体的複体のことをいう．**樹木** T とは，各

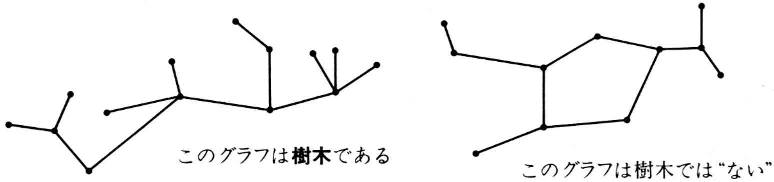


図 4.18

1-単体 $s \in T$ に対して，$[T]-(s)$ が連結でないような弧状連結なグラフのことをいう(図 4.18).

グラフの**端点**とは，高々 1 つの 1-単体の頂点である点をいう.

注意　あらゆる樹木は端点をもつ．もしそうでないとすれば，次のような順路をつくることができる．すなわち，1 つの頂点を出発点として，1-単体に沿って次の頂点にいき，また別の 1-単体に沿って第 3 の頂点へ, $\cdots$．この順路は 1 つの頂点を 2 度通ることはない．なぜなら，もしそのような頂点があったとすると，その頂点に向かう 1-単体を取り除いても連結となり，樹木の定義に反する．もしこの順路が端点に達しないならば，この方法で順路は無限個の頂点を通るであろう．しかし複体は有限個の頂点しかもたないので矛盾する.

> **定理 7**　任意の樹木は可縮である.

証明　頂点の個数に関する帰納法を用いる．T が 1 つの頂点のみをもつときは明らかである．n 個の頂点をもつ樹木に対して定理が正しいと仮定する．T が $n+1$ 個の頂点をもち，v_0 がその端点であるとする．このとき頂点 v_0 をもつ 1-単体 $s \in T$ がただ 1 つ存在する.

$L=T-\{(s), v_0\}$ とすると L は単体的複体で，かつ $[L]=[T]-(s)\cup\{v_0\}$．t を $[L]-(t)$ が連結であるような L の 1-単体とすれば，$[T]-(t)$ も連結である．したがって L は樹木である．L は n 個のみの頂点をもつから，可縮である．さらに L と T はホモトピー同型である (f: $[T]\to[L]$ を，$(s)\cup\{v_0\}$ を s の他の頂点に写し，L をそれ自身へ写すものとする．g: $[L]\to[T]$ を包含写像とする．このとき $f\circ g\simeq i_{[L]}$，$g\circ f\simeq i_{[T]}$)．したがって T は可縮である. ▒

> **系**　T を樹木とし，v_0 を T の頂点とする．このとき
> $$\pi_1([T], v_0)=E(T, v_0)=(e).$$

定義　K をグラフとする．α_0 を K の頂点の個数とし，α_1 を 1-単体の個数とする．$\chi(K)=\alpha_0-\alpha_1$ で定義される整数 $\chi(K)$ を K の**オイラー数**とよぶ.

注意　整数 $\chi(K)$ は細分に関して不変である．実際，K に別のある頂点を加えると，ある 1-単体は 2 つの 1-単体に分かれ，α_0 と α_1 は 1 ずつふえる．

> **定理 8**　T を樹木とする．このとき $\chi(T)=1$ である．

証明　T の頂点の個数 n に関する帰納法を用いる．$n=1$ に対しては明らかである．n 個の頂点をもつ樹木に対して定理が正しいと仮定する．T が $n+1$ 個の頂点をもつとする．L を定理 7 の証明で得られた樹木とすれば L は n 個の頂点をもち，したがって $\chi(L)=1$．ところが $\alpha_0(T)=\alpha_0(L)+1$，$\alpha_1(T)=\alpha_1(L)+1$ である．したがって $\chi(T)=\chi(L)=1$ である．▨

> **定理 9**　K を弧状連結なグラフとする．残りの空間が連結であるように取り出される開 1-単体の最大個数を n とする．(n は K における「基本」回路の個数である．）このとき $n=1-\chi(K)$．

証明　K が樹木ならば $n=0$ である．したがって定理 8 より明らかである．K が樹木でないとき，(s_1) を $[K]-(s_1)$ が連結であるような開 1-単体とする．$K-(s_1)$ が樹木ならばそこで止め，そうでなければ次に (s_2) として $[K]-(s_1)\cup(s_2)$ が連結であるような開 1-単体をとり，これを続けていく．K には有限個の 1-単体しか存在しないから，この操作はいつかは終る．すなわち，ある n に対して $K-\{(s_1), (s_2), \cdots, (s_n)\}$ は樹木 T である．したがって

$$\chi(K)=\chi(T)-n=1-n \qquad \text{すなわち} \qquad n=1-\chi(K).$$

（以上より，「K から 1-単体を取り出して樹木をつくる方法は一意的ではないが，取り出される 1-単体の個数はその方法に依存しない」ことがわかる．）▨

注意　「n 個の生成元をもつ自由群」F_n の定義を復習しよう．n 個の文字 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ と，記号

$$a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1} \quad \text{および} \quad e$$

を考える．これらの文字と記号を任意の順序で——くり返しも許して——有限の長さの列に並べることにより得られる「語」全体の集合を S とする．2 つの語 α と β の「積」$\alpha\beta$ を，α と β を並べることにより定義する（β は α のうしろにつけられる）．語の「逆元」は並べ方の順序を逆にし，同時に a_j を a_j^{-1} に，a_j^{-1} を a_j に，e を e におきかえることにより得られたものである．S 上の同値関係 $\sim$ を次のように定義する．すなわち $ee\sim e$ であり，すべての j に対して

$$\begin{aligned} &a_ja_j^{-1}\sim e, &&a_j^{-1}a_j\sim e \\ &a_je\sim a_j, &&a_j^{-1}e\sim a_j^{-1} \\ &ea_j\sim a_j, &&ea_j^{-1}\sim a_j^{-1}. \end{aligned}$$

さらに，2 つの語が同値($\sim$)であるとは，上の「基本」同値関係のいずれかをくり返し用いて一方から他方が得られることをいう．同値類の集合において，すでに定義した積

と逆元を考え，単位元として e の同値類をとるとそれは群をなす．この群を F_n とする．$a_1, a_2, \cdots, a_n$ をその生成元という．

例 1つの生成元をもつ自由群は，整数の群に同型である．

注意 1 $n>1$ に対して F_n は非可換である．実際，$a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}\neq e$.

注意 2 F_n を生成元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ をもつ自由群，G を任意の群とすると，任意の写像 h: $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\to G$ は準同型写像 $\tilde{h}$: $F_n\to G$ に拡張できる．準同型写像 $\tilde{h}$ は

$$\tilde{h}(a_{j_1}{}^{\pm1}a_{j_2}{}^{\pm1}\cdots a_{j_r}{}^{\pm1})=h(a_{j_1})^{\pm1}h(a_{j_2})^{\pm1}\cdots h(a_{j_r})^{\pm1}$$

により定義される．さらに，この性質は群 F_n を特徴づける．すなわち，H が n 個の元により生成されていて，これらの生成元から勝手な群の中への任意の写像が群準同型に拡張されるならば，H は F_n と同型である．

定理 10 K を弧状連結なグラフとし，v_0 を K の頂点とする．このとき，$\pi_1([K], v_0)$ は，$n=1-\chi(K)$ 個の生成元をもつ自由群と同型である．

例 p_1 と p_2 を R^2 の相異なる点とする．このとき，$p\in R^2-\{p_1, p_2\}$ に対して $\pi_1(R^2-\{p_1, p_2\}, p)$ は2つの生成元をもつ自由群である．なぜならば，まず図4.19のグラフ K を考える（p_1 と p_2 はグラフの部分には含まれないことに注意せよ）．

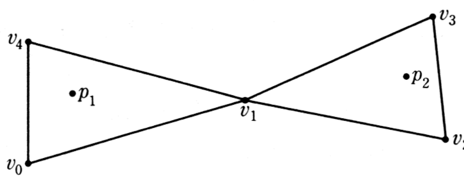


図 4.19

このとき，$R^2-\{p_1, p_2\}$ と $[K]$ は同じホモトピー型をもつ（実際，図4.20の射影で定義された写像 $R^2-\{p_1, p_2\}\to[K]$ と，包含写像 $[K]\to R^2-\{p_1, p_2\}$ とでホモトピー同型が得られる）．したがって，

$$\pi_1(R^2-\{p_1, p_2\}, p)=\pi_1([K], v_0).$$

ところが，$\chi(K)=5-6=-1$，$n=1-(-1)=2$ であるから，定理10より $\pi_1([K], v_0)\cong F_2$.

定理10の証明 $h_1\circ h$ と $h\circ h_1$ が恒等写像であるような準同型写像

$$h\colon E(K, v_0)\to F_n, \qquad h_1\colon F_n\to E(K, v_0)$$

を構成しよう．そうすれば $E(K, v_0)$ が F_n と同型であることが示され，定理5に帰着される．

***h* の構成** $(s_1), (s_2), \cdots, (s_n)$ $(n=1-\chi(K))$ を $T=K-\{(s_1), (s_2), \cdots,$

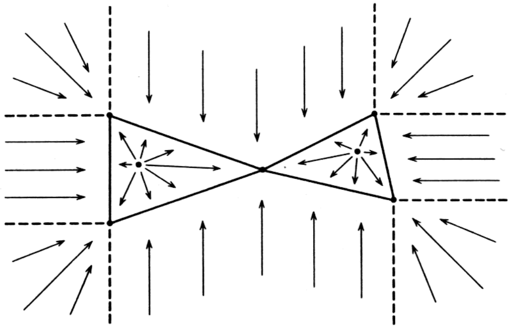


図 4.20

$(s_n)\}$ が樹木であるような K の開1-単体とする(定理9を参照せよ). F_n を生成元 $(s_1), (s_2), \cdots, (s_n)$ をもつ自由群とする. 各 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して $s_j{}^{+1}$ を K の稜 $|v_jv_j'|$ とする. ただし, v_j と v_j' は s_j の頂点である. (ここで, 各 s_j の頂点に対して暗黙のうちにある順序づけがなされている.) $s_j{}^{-1}$ を稜 $|v_j'v_j|$ とする. このとき K の各順路は

$$\omega=\rho_1 s_{j_1}{}^{\pm1}\rho_2 s_{j_2}{}^{\pm1}\cdots\rho_k s_{j_k}{}^{\pm1}\rho_{k+1}$$

という形である. ここで, 各 ρ_i は樹木 T の順路である(自明な順路 $|v_{j_i}v_{j_i}|$ も許す). いま,

$$h(\omega)=(s_{j_1})^{\pm1}(s_{j_2})^{\pm1}\cdots(s_{j_k})^{\pm1}$$

とおく. h が定義可能であることを確かめねばならない. すなわち, $h(\omega)$ が ω の稜同値類のみに依存することをいう. このためには,「ω_1 と ω_2 が K の順路で, 基本稜同値の違いだけならば $h(\omega_1)=h(\omega_2)$ であること」を示せば十分である. そこで

$$\omega_1=\sigma|v_1v_2||v_2v_3|\tau, \qquad \omega_2=\sigma|v_1v_3|\tau$$

とする. ただし σ と τ は K の順路で, v_1, v_2, v_3 は K の同一の単体の頂点である. K はグラフだから, 2-単体をもたず, $v_1=v_2=v_3$, $v_1=v_2$, $v_2=v_3$, $v_1=v_3$ のいずれかである. 最初の3つの場合のおのおのにおいては, 単体 (v_1, v_2) と (v_2, v_3) の少なくとも1つは0-単体であり, したがって, それは (s_j) ではなく, 他は (v_1, v_3) に等しい. このように最初の3つの場合のおのおのにおいて $h(\omega_1)=h(\omega_2)$ である. 第4の場合は,

$$\omega_1=\sigma|v_1v_2||v_2v_1|\tau, \qquad \omega_2=\sigma|v_1v_1|\tau.$$

(v_1, v_2) が s_j でなければ明らかに $h(\omega_1)=h(\omega_2)$. ある j に対して $(v_1, v_2)=(s_j)$ ならば

$$\omega_1=\sigma s_j^{\pm 1}s_j^{\mp 1}\tau$$
$$h(\omega_1)=h(\sigma)(s_j)^{\pm 1}(s_j)^{\mp 1}h(\tau)=h(\sigma)eh(\tau)=h(\sigma)h(\tau)=h(\omega_2).$$

したがって，すべての場合において $h(\omega_1)=h(\omega_2)$ であり，h は定義可能である．明らかに h は準同型である．

h_1 の構成 F_n は自由群だから，生成元 $(s_j)=(v_j, v_j')$ 上で h_1 を定義すれば十分である．このためには σ_j を樹木 T の v_0 から v_j への順路，τ_j を T の v_0 から v_j' への順路とし，$h_1((s_j))$ を順路 $\sigma_j s_j^{+1}\tau_j^{-1}$ の稜同値類と定義する．この定義は σ_j に依存しない．なぜならば，v_0 から v_j への T の他の任意の順路は，σ_j に稜同値である(T は定理 7 より単連結であるから)．(τ_j に対しても同様.) h_1 は一意的に準同型写像 $F_n\to E(K, v_0)$ に拡張される．

$h\circ h_1$ は恒等写像である．なぜならば，F_n の各生成元 (s_j) に対して

$$h\circ h_1((s_j))=h(\sigma_j s_j^{+1}\tau_j^{-1})=(s_j).$$

$h_1\circ h$ は恒等写像である．なぜならば

$$\omega=\rho_1 s_{j_1}^{\pm 1}\rho_2 s_{j_2}^{\pm 1}\cdots\rho_k s_{j_k}^{\pm 1}\rho_{k+1}$$

が K の順路であるならば

$$\begin{aligned}h_1\circ h(\omega)&=h_1((s_{j_1})^{\pm 1}(s_{j_2})^{\pm 1}\cdots(s_{j_k})^{\pm 1})\\&=(\sigma_{j_1}s_{j_1}^{+1}\tau_{j_1}^{-1})^{\pm 1}(\sigma_{j_2}s_{j_2}^{+1}\tau_{j_2}^{-1})^{\pm 1}\cdots(\sigma_{j_k}s_{j_k}^{+1}\tau_{j_k}^{-1})^{\pm 1}\\&=\eta_{j_1}s_{j_1}^{\pm 1}\eta_{j_1}'\eta_{j_2}s_{j_2}^{\pm 1}\eta_{j_2}'\cdots\eta_{j_k}s_{j_k}^{\pm 1}\eta_{j_k}'.\end{aligned}$$

ただし

$$\eta_{j_i}=\begin{cases}\sigma_{j_i} & (s_{j_i}\text{ が }s_{j_i}^{+1}\text{ として現われるとき})\\ \tau_{j_i} & (s_{j_i}\text{ が }s_{j_i}^{-1}\text{ として現われるとき})\end{cases}$$

$$\eta_{j_i}'=\begin{cases}\tau_{j_i}^{-1} & (s_{j_i}\text{ が }s_{j_i}^{+1}\text{ として現われるとき})\\ \sigma_{j_i}^{-1} & (s_{j_i}\text{ が }s_{j_i}^{-1}\text{ として現われるとき}).\end{cases}$$

ところが ρ_1 と η_{j_1} とは，両方とも v_0 から $s_{j_1}^{\pm 1}$ の始点への T の順路であり，これより，稜同値である(T は単連結)．同様に，ρ_2 と $\eta_{j_1}'\eta_{j_2}$ とはどちらも，$s_{j_1}^{\pm 1}$ の終点から $s_{j_2}^{\pm 1}$ の始点への順路であり，これより稜同値である．帰納的に $h_1\circ h(\omega)\overset{\mathrm{E}}{\simeq}\omega$ が結論できる．すなわち，$h_1\circ h$ は恒等写像である． ▒

> **系 1** K を単体的複体とする．このとき，基本群 $\pi_1([K], v_0)$ (v_0 は K の頂点) は「自然な」方法で自由群の商群となる．

証明 K は(したがって K^1 もまた)弧状連結と仮定してよい．$i\colon K^1\to K$ を包含写像とする．このとき

$$i_*\colon E(K^1, v_0)\to E(K, v_0)$$

は稜道群の定義から全射である．したがって，定理 5 より

$$i_*:\ \pi_1([K^1],\ v_0)\to\pi_1([K],\ v_0)$$

は全射である．$n=1-\chi(K^1)$ とする．このとき $\pi_1([K^1],\ v_0)=F_n$．すなわち，n 個の生成元の自由群であり，したがって

$$i_*:\ F_n\to\pi_1([K],\ v_0)$$

は全射である．H を i_* の核とすると，

$$\pi_1([K],\ v_0)\simeq F_n/H. \quad ▒$$

注意　$E(K^1,\ v_0)$ を F_n とみなすと，部分群 H は，$\rho_1|v_1v_2||v_2v_3||v_3v_1|\rho_2^{-1}$ という形の順路により生成された部分群である．ただし，ρ_1 と ρ_2 は v_0 から v_1 への樹木 T の順路であり，かつ $(v_1,\ v_2,\ v_3)$ は K の 2-単体である．

系 2　$D^2=\{(x,\ y)\in R^2,\ x^2+y^2\leq 1\}$ を R^2 の単位球体とすると，$f|_{S^1}$ が恒等写像であるような連続写像 $f:\ D^2\to S^1$ は存在しない．

証明　そのような f が存在したと仮定する．$g:\ S^1\to D^2$ を包含写像とする．このとき $f\circ g=i_{S^1}$ であり，したがって $(f\circ g)_*:\ \pi_1(S^1,\ 1)\to\pi_1(S^1,\ 1)$ は恒等写像である．ところが，$(f\circ g)_*=f_*\circ g_*$ であり，また，D^2 は 1 点にホモトピックであるから，$\pi_1(D^2,\ 1)=(e)$．このとき

$$\mathrm{Im}(f\circ g)_*=\mathrm{Im}(f_*\circ g_*)\subset\mathrm{Im}f_*=(e).$$

$(f\circ g)_*$ は全射だから，$\pi_1(S^1,\ e)=(e)$．これは定理 10 に矛盾する．▒

系 3　（ブロウアーの不動点定理の特別な場合）　D^2 を R^2 の単位球体とする．$f:\ D^2\to D^2$ が連続であれば f は不動点をもつ．すなわち $f(x)=x$ となる $x\in D^2$ が存在する．

証明　不動点が存在しないと仮定する．このとき，各 $x\in D^2$ に対して

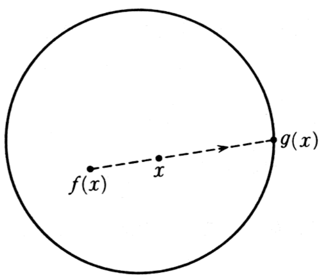


図 4.21

$f(x) \neq x$ であり，$x-f(x) \neq 0$（R^2 におけるベクトルの和）．g：$D^2 \to S^1$ を次のように定義する．すなわち，各 $x \in D^2$ に対して $g(x)$ をベクトル $x-f(x)$ に沿った S^1 の上への $f(x)$ の射影とする（図 4.21）．このとき g は連続で，$g|_{S^1}$ は恒等写像である．これは前の系に反する．▒

注意　これら 2 つの系は高い次元へ一般化される．「(1) n-円板 D^n（R^n の閉球体）からその境界（($n-1$)-球面 S^{n-1}）の上への連続写像で，S^{n-1} への制限が恒等写像であるものは存在しない．(2) 閉 n-円板 D^n からそれ自身の中への任意の連続写像は不動点をもつ.」

しかしながら，S^{n-1} は $n>2$ に対しては単連結だから，上記の証明は適用できない．証明中の基本群は，別の位相不変量（($n-1$)-次ホモロジー群）によりおきかえられねばならない．$n=1$ の場合には $D^1=I$ が連結であることから，これらの系が成り立つ．

5章　多様体

5.1　微分可能多様体

定義　n 次元**局所ユークリッド空間** X とは，ハウスドルフ空間で，各 $x \in X$ に対して，x を含むある開集合を R^n の開集合の上へ写す同相写像 φ_x が存在するものをいう．

注意　必要ならば，各 φ_x を，$\varphi_x(x)=0$ かつ φ_x の像が球体 $B_0(\varepsilon)$ となるように選べる．与えられた φ_x が，x を含む開集合 U を R^n のある開集合の上に同相に写すとする．まず，$\varepsilon>0$ を $B_{\varphi(x)}(\varepsilon) \subset \varphi_x(U)$ となるようにとる．次に，

$$\psi\colon B_{\varphi(x)}(\varepsilon) \to B_0(\varepsilon)$$

を $-\varphi(x)$ だけの平行移動とし，

$$\tilde{\varphi}_x = \psi \circ \varphi_x|_{\varphi_x^{-1}(B_{\varphi(x)}(\varepsilon))}$$

とすれば，$\tilde{\varphi}_x$ は $\varphi_x^{-1}(B_{\varphi(x)}(\varepsilon))$ を $B_0(\varepsilon)$ の上に同相に写す．

例 1　R^n は局所ユークリッド空間である．各 $x \in R^n$ に対して φ_x を恒等写像とせよ．

例 2　S^n は局所ユークリッド空間である．$x \in S^n$ に対して $y \in S^n$，$y \neq x$ をとる．このとき，$\varphi_x=$(y からの立体射影) は $S^n-\{y\}$ を R^n の上に同相に写す．

例 3　射影空間 P^n，すなわち，R^{n+1} の中の原点を通る直線全体のなす空間は局所ユークリッド空間である．なぜなら，P^n は S^n を被覆空間としてもつから，各 $x \in P^n$ は S^n の開集合と同相な開集合に含まれる．ところが，S^n は局所ユークリッド空間だから，S^n の開集合の中の各点は，R^n の開集合と同相な開集合に含まれる．

例 4　局所ユークリッド空間 X の任意の開集合 U は，局所ユークリッド空間である．各 $x \in U$ に対して，x を含む X の開集合を R^n の開集合の上に写す同相写像を ψ_x として，$\varphi_x=\psi_x|_{U \cap (\mathrm{domain}\,\psi_x)}$ とせよ．ここで domain ψ_x とは，ψ_x の定義域のことである．

例 5　正則な $k\times k$ 行列全体の集合は，k^2 次元の局所ユークリッド空間になる．各 $k\times k$ 行列は，すべての行を一直線に並べることにより k^2 個の実数の組と同一視できる．正則行列の全体は，R^{k^2} の開集合，すなわち，行列式関数を $\Delta\colon R^{k^2}\to R^1$ として，$\Delta^{-1}(R^1-\{0\})$ になっている．

定義　n 次元の **C^k-微分可能多様体**とは，ハウスドルフ空間 X と次の条件を満たす写像の集まり $\boldsymbol{\Phi}$ との組 $(X, \boldsymbol{\Phi})$ のことである(図 5.1)．

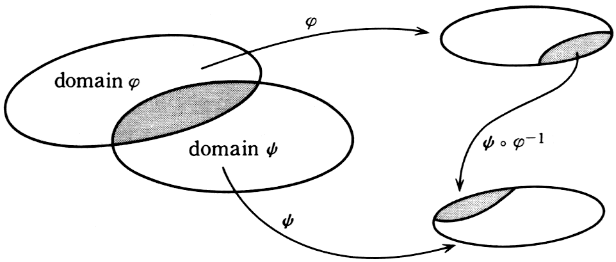


図 5.1

（1）　$\{\mathrm{domain}\,\varphi\}_{\varphi\in\boldsymbol{\Phi}}$ は X の開被覆である．

（2）　各 $\varphi\in\boldsymbol{\Phi}$ は，その定義域を R^n の開集合の上に写す同相写像である．

（3）　各 $\varphi, \psi\in\boldsymbol{\Phi}$ に対して $(\mathrm{domain}\,\varphi\cap\mathrm{domain}\,\psi)\neq\phi$ であれば，写像 $\psi\circ\varphi^{-1}$ は $\varphi(\mathrm{domain}\,\varphi\cap\mathrm{domain}\,\psi)\subset R^n$ から R^n の中への C^k-写像である．

（4）　$\boldsymbol{\Phi}$ は(2)と(3)に関し極大である．すなわち，ψ を X の開集合から R^n の開集合の上への任意の同相写像としたとき，$(\mathrm{domain}\,\varphi\cap\mathrm{domain}\,\psi)\neq\phi$ なる各 $\varphi\in\boldsymbol{\Phi}$ に対して，$\psi\circ\varphi^{-1}$ と $\varphi\circ\psi^{-1}$ が，それぞれ $\varphi(\mathrm{domain}\,\varphi\cap\mathrm{domain}\,\psi)$ と $\psi(\mathrm{domain}\,\varphi\cap\mathrm{domain}\,\psi)$ から R^n の中への C^k-写像であれば，$\psi\in\boldsymbol{\Phi}$ である．

k としては $0, 1, 2, \cdots, \infty, \omega$ をとる．ここで C^0 は連続を意味し，また有限な値 k に対して C^k は，階数$\leq k$ のすべての偏導関数が存在しかつ連続であることを意味し，C^∞ は，すべての階数のすべての偏導関数が存在しかつ連続であることを意味する．C^ω とは，実解析的，すなわち各点の近傍で収束するテーラー級数として表わされる関数のことである．

C^k-多様体は局所ユークリッド空間であり，局所ユークリッド空間は C^0-多様体である．

$n=2$ で，(3)の「C^k」を「複素解析的」とおきかえる(ただし R^2 を複素数の集合 C^1 と同一視する)とき，(X, Φ)は複素次元が1の**複素解析的多様体**あるいは**リーマン面**とよばれる．このとき Φ は，X 上の**複素構造**あるいは**共形構造**という．

写像 $\varphi \in \Phi$ は**座標系**とよばれる．厳密には，写像 $\varphi \in \Phi$ は**開集合** domain $\varphi \subset X$ **上の座標系**であるという．$x \in X$ に対する **x のまわりの座標系**とは，$x \in$ domain φ である座標系 $\varphi \in \Phi$ のことである．

注意 局所ユークリッド空間の例1, 2, 3, 5には，各々 C^∞-多様体の構造がはいる．写像 φ_x が多様体の条件(3)を満足することのみ確かめればよい．Φ として，$\{\varphi_x\}_{x \in X}$ を含む極大集合をとる．例4に相当することは多様体の場合にも成り立つ．すなわち，(X, Φ) が C^k-多様体で，U が X の開集合ならば，$(U, \Phi|_U)$ は C^k-多様体である．ただし $\Phi|_U = \{\varphi|_U\}_{\varphi \in \Phi}$ である．

定義 (X, Φ) を C^k-多様体とする．実数値関数 f: $X \to R^1$ が(多様体 X 上の) **C^s-関数** $(s \leq k)$ であるとは，各 $\varphi \in \Phi$ に対して，$f \circ \varphi^{-1}$ が (φ の像)$\subset R^n$ から R^1 への C^s-関数であることをいい，$f \in C^s(X, R^1)$ と表わす．

(X, Φ) を C^k-多様体とし，$x \in X$ をとる．実数値関数 f が **x の近傍において C^s 級**$(s \leq k)$であるとは，

$$U = (\text{domain}\, f)$$

が x を含む X の開集合で，$f \in C^s(U, R^1)$ であることをいう．ただし，このとき U に X の開集合としての C^k-多様体構造を入れる．f が x の近傍において C^s 級であることを $f \in C^s(X, x, R^1)$ と表わす．

注意 X 上の C^s-関数が定義できるのは次の理由による．
(1) X は(座標系 $\varphi \in \Phi$ により)局所的には R^n とみなすことができるから，R^n 上の関数に対する C^s の概念が利用できる．
(2) $\varphi, \psi \in \Phi$ に対して，$U=$ domain φ, $V=$ domain ψ, $U \cap V \neq \phi$ とすると，$U \cap V$ の元 x の近傍における C^s-関数の概念は，座標系 φ に関しても座標系 ψ に関しても同じである．なぜならば，$\psi \circ \varphi^{-1}$ が C^k-同相写像$(k \geq s)$だからである．

また，f と g が x の近傍において C^s-関数ならば，$f+g$ と fg (積)も x の近傍において C^s-関数である．ただし，このとき

$$\text{domain}(f+g) = \text{domain}(fg) = (\text{domain}\, f) \cap (\text{domain}\, g)$$

とする．

定義 (X, Φ) を C^k-多様体とし，$\varphi \in \Phi$ を $U=(\text{domain}\, \varphi)$ 上の座標系とす

る．r_j: $R^n \to R^1$ を R^n 上の第 j 座標関数とする．すなわち，$(a_1, \cdots, a_n) \in R^n$ に対して $r_j(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_j$ である．座標系 φ の**第 j 座標関数**とは，$x_j = r_j \circ \varphi$ により定義された関数 x_j: $U \to R^1$ である．また $U = (\mathrm{domain}\,\varphi)$ を**座標近傍**という．

注意 x_j: $U \to R^1$ は C^k-関数である．n 個の関数の組$(x_1, \cdots, x_n)$も，しばしば座標系といわれる．

定義 (X_1, Φ_1) と (X_2, Φ_2) を C^k-多様体とする（同じ次元である必要はない）．写像 Ψ: $X_1 \to X_2$ が C^s 級$(s \leq k)$であるとは，$f \in C^s(X_2, R^1)$ ならば必ず $f \circ \Psi \in C^s(X_1, R^1)$ が成り立つことをいい，$\Psi \in C^s(X_1, X_2)$ と表わす．

問題 1 Ψ: $X_1 \to X_2$ が C^s 級$(s \geq 0)$ならば，Ψ は連続であることを示せ．

注意 今後は C^∞-多様体に話を限ることにしよう．これは，特別な場合として，C^ω-多様体と次元1の複素多様体も含んでいる．また，「滑らかな」という言葉を C^∞ の意味で用いることにする．

次に，多様体上の接ベクトルの概念を定義しよう．ユークリッド空間において，ある点でのベクトルは滑らかな関数に実数を対応させる写像，すなわち，与えられたベクトルの方向に関する微分を定める．さらに，そのベクトルは，すべての滑らかな関数に対する値によって決定される．多様体上の接ベクトルを定義するにあたり，この性質を用いよう．

定義 (X, Φ)を滑らかな多様体とし，$x \in X$ をとる．x における**接ベクトル**とは，写像 v: $C^\infty(X, x, R^1) \to R^1$ で，φ を $x \in U = (\mathrm{domain}\,\varphi)$ である（固定された）座標系としたとき，次のような性質をもつ n 個の実数の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ が存在するものをいう．すなわち，各 $f \in C^\infty(X, x, R^1)$ に対して

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial r_i}(f \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)}.$$

（$W = \mathrm{domain}\,f$ ならば，φ と f はともに x を含む開集合 $U \cap W$ で定義されており，$f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(x)$ を含む $\varphi(U \cap W) \subset R^n$ を定義域としてもつ滑らかな関数であることに注意せよ．）

v: $C^\infty(X, x, R^1) \to R^1$ が x のまわりの1つの座標系 φ に関して，上の接ベクトルの条件を満たすならば，v はまた，x のまわりの他の任意の座標系に関してもこの条件を満足する．実際，ψ をもう1つの座標系とすれば，鎖法則を用いて

$$v(f)=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial r_i}(f\circ\varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial r_i}(f\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r_j}(f\circ\psi^{-1})\Big|_{\psi(x)}J_{ji}(\psi\circ\varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)}.$$

ただし，$J_{ij}(\psi\circ\varphi^{-1})$ は関数 $\psi\circ\varphi^{-1}$ のヤコビ行列である．これより

$$v(f)=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_iJ_{ji}(\psi\circ\varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)}\Big)\frac{\partial}{\partial r_j}(f\circ\psi^{-1})\Big|_{\psi(x)}.$$

ここで，

$$b_j=\sum_{i=1}^{n}a_iJ_{ji}(\psi\circ\varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)}$$

とおくと，

$$v(f)=\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial}{\partial r_j}(f\circ\psi^{-1})\Big|_{\psi(x)}.$$

したがって，v が x における接ベクトルかどうかを確かめるには，x におけるある**1**つの座標系において条件を確かめれば十分である．

記号 与えられた x のまわりの座標系 φ に関して，$x_j=r_j\circ\varphi$ を φ の第 j 座標関数とする．$\partial/\partial x_j$ ($j=1, \cdots, n$)は，$f\in C^\infty(X, x, R^1)$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f)=\frac{\partial}{\partial r_j}(f\circ\varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)}$$

で定義された x における接ベクトルを表わす．したがって，$\partial/\partial x_j$ は座標系 φ に関して，n 個の組 $(0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ に対応する．ここで**1**は j 番目の位置にある．

1. $x_1, \cdots, x_n$ が x のまわりの座標系 φ の座標関数であり，$y_1, \cdots, y_n$ が x のまわりの座標系 ψ の座標関数であるならば，上の式は

$$\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(y_i)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

を示している．

2. $x\in X$ における接ベクトル v は次の性質をもつ．任意の $f, g\in C^\infty(X, x, R^1)$ と $\lambda\in R^1$ に対して

(1) $v(f+g)=v(f)+v(g)$,

(2) $v(\lambda f)=\lambda v(f)$,

(3) $v(fg)=v(f)g(x)+f(x)v(g)$.

性質(1)～(3)は，写像 v: $C^\infty(X, x, R^1)\to R^1$ が**微分作用素**であることをいっている．さらに，これらの性質は接ベクトルを特徴づける．すなわち，接ベクトルを上の(1)～(3)を満たす写像 v: $C^\infty(X, x, R^1)\to R^1$ と定義することができ，x のまわりの任意の座標系 φ に関して，ある n 個の実数の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対し，$v=\sum_{i=1}^{n} a_i(\partial/\partial x_i)$ であることが証明できる．ただし，x_i は φ の第 i 座標関数である．

3. x における接ベクトル全体の集合 X_x は，次の和とスカラー倍によってベクトル空間をなす．

$$(v_1+v_2)(f)=v_1(f)+v_2(f) \qquad (v_1,\ v_2\in X_x)$$

$$(\lambda v_1)(f)=\lambda(v_1(f)) \qquad (v_1\in X_x,\ \ \lambda\in R^1).$$

v_1+v_2 と λv_1 が，x における接ベクトルであることを確かめる．φ を座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ x のまわりの座標系とすると，ある $(a_1, \cdots, a_n)$ と $(b_1, \cdots, b_n)$ に対して，

$$v_1=\sum_{i=1}^{n} a_i(\partial/\partial x_i), \qquad v_2=\sum_{i=1}^{n} b_i(\partial/\partial x_i).$$

このとき，

$$v_1+v_2=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \lambda v_1=\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

であることが容易に確かめられる．写像 $(a_1, \cdots, a_n)\to\sum_{i=1}^{n} a_i(\partial/\partial x_i)$ はベクトル空間としての同型写像 $R^n\to X_x$ を与え，したがって X_x は n 次元である．さらに，$\{\partial/\partial x_i\}_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ が X_x の基底であることは明らかである．空間 X_x は，x における**接空間**とよばれ，$T(X)_x$ あるいは $T(X, x)$ とも書かれる．

x における2つの座標系 φ と ψ に対して，それぞれの座標関数を $(x_1, \cdots, x_n)$，$(y_1, \cdots, y_n)$ とすると，式

$$\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(y_i)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

は，ベクトル $\partial/\partial x_j$ を基底 $\{\partial/\partial y_i\}_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ を用いて表わしたものにすぎない．このように，X_x の基底 $\{\partial/\partial y_i\}$ から基底 $\{\partial/\partial x_i\}$ への基底変換行列がちょうどヤコビ行列 $((\partial/\partial x_j)(y_i))$ である．

4. 1点 $a\in R^n$ における R^n の接空間 $T(R^n, a)$ は，自然に R^n 自身と同型である．同型写像 $R^n\to T(R^n, a)$ は，次式により与えられる．

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\to\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial}{\partial r_i}.$$

記号 以後，微分可能多様体 (X, Φ) の記号から Φ を省く．もちろん，局所ユークリッド空間 X はその上に2つまたはそれ以上の異なる微分構造をもつかもしれない（あるいは全然もたないかもしれない）が，多様体 (X, Φ) を単に X と書き，その上にあるきめられた微分構造が与えられていると仮定しよう．

定義 X と Y を滑らかな多様体とし，$\Psi: X \to Y$ を滑らかな写像とする．$x \in X$ における Ψ の**微分**とは，次のように定義された写像 $d\Psi: X_x \to Y_{\Psi(x)}$ のことである．すなわち，$v \in X_x$ と $g \in C^\infty(Y, \Psi(x), R^1)$ とに対して

$$(d\Psi(v))(g) = v(g \circ \Psi).$$

さて，$d\Psi(v)$ が $\Psi(x)$ における接ベクトルであることは容易に確かめられる．以下にそれを示そう．φ を座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ x のまわりの座標系，τ を座標関数 $(y_1, \cdots, y_m)$ をもつ $\Psi(x)$ のまわりの座標系とする．このとき，ある実数 a_i に対して $v = \sum_{i=1}^n a_i(\partial/\partial x_i)$ であり，$g \in C^\infty(Y, \Psi(x), R^1)$ とすると，

$$\begin{aligned}
[d\Psi(v)](g) = v(g\circ\Psi) &= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ\Psi) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial r_i}(g\circ\tau^{-1}\circ\tau\circ\Psi\circ\varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)} \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial s_j}(g\circ\tau^{-1})\Big|_{\tau\circ\Psi(x)} \frac{\partial}{\partial r_i}(s_j\circ\tau\circ\Psi\circ\varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)} \\
&\qquad\qquad ((s_1, \cdots, s_m) \text{ は } R^m \text{ 上の座標}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial y_j}(g) \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j\circ\Psi) \\
&= \left[\sum_{j=1}^m v(y_j\circ\Psi)\frac{\partial}{\partial y_j}\right](g).
\end{aligned}$$

このことがすべての $g \in C^\infty(Y, \Psi(x), R^1)$ に対して成り立つから，

$$\boxed{d\Psi(v) = \sum_{j=1}^m v(y_j\circ\Psi)\frac{\partial}{\partial y_j}}$$

であり，特に $d\Psi(v)$ は接ベクトルである．さらに $d\Psi$ が線形写像 $X_x \to Y_{\Psi(x)}$ であることは明らかである．

$$d\Psi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j\circ\Psi)\frac{\partial}{\partial y_j}$$

であるから，この線形写像 $d\Psi$ は基底 $\{\partial/\partial x_i\}_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ と $\{\partial/\partial y_j\}_{j\in\{1,\cdots,m\}}$ とに関

して，次の行列で表わされる．

$$(d\Psi)_{ij}=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(y_i\circ\Psi)\right).$$

X, Y, Z を滑らかな多様体とする．$\Psi: X\to Y$ と $\Phi: Y\to Z$ を滑らかな写像とすれば，$d(\Phi\circ\Psi)=d\Phi\circ d\Psi$ である．

証明 $v\in X_x$, $h\in C^\infty(Z, \Phi\circ\Psi(x), R^1)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}[d(\Phi\circ\Psi)(v)](h)&=v(h\circ(\Phi\circ\Psi))=v((h\circ\Phi)\circ\Psi)=d\Psi(v)(h\circ\Phi)\\ &=[d\Phi(d\Psi(v))](h)=[(d\Phi\circ d\Psi)(v)](h).\end{aligned}$$ ▓

注意 X を滑らかな多様体とし，U を X の開集合とする．このとき，U はそれ自身滑らかな多様体である．また，包含写像 $i: U\to X$ は滑らかな写像である．実際，$f\in C^\infty(X, R^1)$ より $f|_U\in C^\infty(U, R^1)$ がいえる．さらに，微分

$$di: T(U, u_0)\to T(X, u_0) \qquad (u_0\in U)$$

は同型写像である．すなわち，これら2つの線形空間を同一視することができる．

問題 2[1] X の点 u_0 を含む開集合 U に対して，u_0 を含む開集合 W をうまくとって，

$$h(x)=\begin{cases}1 & (x\in W)\\ 0 & (x\notin U)\end{cases}$$

を満たす関数 $h\in C^\infty(X, R^1)$ を構成せよ．

（ヒント：次のように定義された滑らかな関数 $g: R^1\to R^1$ を用いるとよい．）

$$g(t)=\begin{cases}e^{-1/t^2} & (t>0)\\ 0 & (t\leq 0).\end{cases}$$

また，$f_1\in C^\infty(U, u_0, R^1)$ のとき，上の h を用いて $u_0\in W$, $\overline{W}\subset U$ なる開集合 W と，$f|_W=f_1|_W$ である $f\in C^\infty(X, R^1)$ とが存在することを示せ．

X を滑らかな多様体とし，$f\in C^\infty(X, R^1)$ とする．df を計算しよう．$v\in T(X, x)$ に対して $df(v)\in T(R^1, f(x))$ である．$T(R^1, f(x))$ は1次元であるから，ある $\lambda\in R^1$ に対して $df(v)=\lambda(d/dr)$ である．λ を決定するためには，$df(v)$ を次のように座標関数 $r: R^1\to R^1$ について計算すれば十分である．

$$\lambda=\left[\lambda\frac{d}{dr}\right](r)=[df(v)](r)=v(r\circ f)=v(f).$$

したがって $df(v)=v(f)(d/dr)$ である．さて，$T(R^1, f(x))$ は同型写像 $\lambda(d/dr)\to\lambda$ により自然に R^1 と同型である．この同型写像でこれら2つの空間を同一視しよう．このとき $df: T(X, x)\to R^1$ は $T(X, x)$ 上の線形汎関数である．すなわち df は双対空間 $T^*(X, x)$ の元であり，

$$df(v)=v(f) \qquad (v\in T(X, x))$$

で与えられる．$T^*(X, x)$ は x における**余接空間**といわれる．

1) ［訳注］ 松島与三著「多様体入門」（裳華房），p. 61，定理2参照．

定義 X を滑らかな多様体とする．X における**滑らかな曲線**とは，ある（開あるいは閉）区間$\subset R^1$ から X の中への滑らかな写像 α のことである．α の定義域が閉区間 $[a, b]$ の場合，α が滑らかであるとは，α が滑らかな拡張

$$\tilde{\alpha}:\ (a-\varepsilon,\ b+\varepsilon) \to X$$

をもつことを意味する．（閉区間は R^1 の開集合であり，したがって滑らかな多様体である．）

X における**区分的 C^∞-曲線**とは，連続写像 α: $[a, b] \to X$ で，$[a, b]$ のある細分に対してその各閉部分区間上で C^∞-曲線であるものをいう．

例
$$\alpha(t)=\begin{cases}(t,\ t\sin 1/t) & (t\in(0,1]) \\ (0,\ 0) & (t=0)\end{cases}$$

は R^2 の滑らかな曲線では“ない”．なぜなら，α は 0 を越える滑らかな拡張をもたないからである．

定義 α: $I\to X$（I はある区間$\subset R^1$）を X の滑らかな曲線とする．時刻 t（$t\in I$）における α の**接ベクトル**を $\dot{\alpha}(t)$ と書き，

$$\dot{\alpha}(t)=d\tilde{\alpha}\left(\left(\frac{d}{dr}\right)_t\right)$$

により定義する．$\dot{\alpha}(t)$ は I の端点においても定義可能である．

与えられた接ベクトル $v\in X_x$ に対して，α: $I\to X$ を，時刻 $t=0$ における接ベクトルが v であるような滑らかな曲線とする（たとえば，x のまわりの座標系 φ をとり，時刻 0 における接ベクトルが $d\varphi(v)$ になる R^n の曲線（たとえば直線）を見つけ，この曲線を φ^{-1} によって X に戻せばよい）．このとき，$f\in C^\infty(X, x, R^1)$ に対して

$$v(f)=\dot{\alpha}(0)(f)=d\tilde{\alpha}\left(\left(\frac{d}{dr}\right)_0\right)(f)=\frac{d}{dr}(f\circ\tilde{\alpha})|_0.$$

このように，$v(f)$ は f を曲線 α へ「制限」したものの微分である．さらに，2 つの曲線 α_1, α_2 が時刻 0 において同じ接ベクトルをもつための必要十分条件は，$\alpha_1(0)=\alpha_2(0)$，かつすべての $f\in C^\infty(X, x, R^1)$ に対して

$$\frac{d}{dr}(f\circ\tilde{\alpha}_1)|_0=\frac{d}{dr}(f\circ\tilde{\alpha}_2)|_0$$

であることである（図 5.2）．この関係式によって，$\alpha(0)=x$ なるすべての曲線 α の集合の中に同値関係を定義することができる．このとき x を通る曲線の同値類と，x における接ベクトルとの間に 1 対 1 対応が得られる．よって，x にお

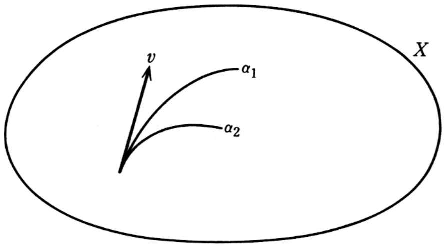


図 5.2

ける接ベクトルを x を通る曲線の上のような同値類と定義することもできる.

5.2 微分形式

定義 X を滑らかな多様体とする.

$$T(X)=\bigcup_{x\in X}T(X,x),\qquad T^*(X)=\bigcup_{x\in X}T^*(X,x)$$

としたとき, $T(X)$ は X の**接ベクトル束**とよばれ, $T^*(X)$ は X の**余接ベクトル束**とよばれる.

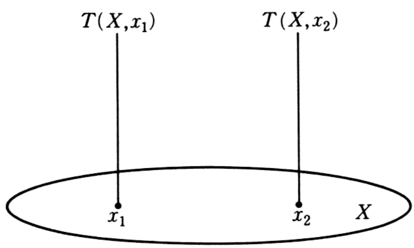


図 5.3

射影 π: $T(X)\to X$ は次のように定義される. $v\in T(X)$ ならば, ある(一意的な) $x\in X$ に対して $v\in T(X,x)$ である. ここで $\pi(v)=x$ とおく. 同様に, $T^*(X)$ から X の上への射影が定義され, これも π と書く.

X 上の**ベクトル場**とは, $\pi\circ V=i_X$ である写像 V: $X\to T(X)$ のことである. ベクトル場 V が**滑らか**であるとは, 各 $f\in C^\infty(X,R^1)$ に対して $Vf\in C^\infty(X,R^1)$ であることをいう. ただし Vf は

$$(Vf)(x)=V(x)f.$$

X 上の微分 1-形式とは, $\pi\circ\omega=i_X$ である写像 ω: $X\to T^*(X)$ のことであ

る．微分 1–形式が滑らかとは，X 上の滑らかな各ベクトル場 V に対して，

$$\omega(V) \in C^{\infty}(X, R^1)$$

となることである．ここで，$\omega(V)$ は，$(\omega(V))(x)=\omega(x)(V(x))$ である．X 上の滑らかなベクトル場全体の集合を $C^{\infty}(X, T(X))$ と書き，滑らかな 1–形式全体の集合を $C^{\infty}(X, T^*(X))$ と書く[1]．

問題 $T(X)$ 上に多様体の構造を定義して，π が滑らかになり，かつベクトル場 V が滑らかであることと $V\colon X\to T(X)$ が滑らかであることとが同値になるようにせよ．

（ヒント：座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ X 上の局所座標系 $\varphi\colon U\to R^n$ に対して，$\tilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U)\to R^{2n}$ を

$$\tilde{\varphi}(v)=(\varphi\circ\pi(v), b_1, \cdots, b_n)$$

により定義せよ．ただし，$v=\sum_{i=1}^{n} b_i(\partial/\partial x_i)$, $b_1, \cdots, b_n\in R^1$ とする．）

次のことがいえる．

1． $f\in C^{\infty}(X, R^1)$ ならば，$df\in C^{\infty}(X, T^*(X))$ である．実際，$V\in C^{\infty}(X, T(X))$ とすると，$df(V)=Vf\in C^{\infty}(X, R^1)$ である．

2． $C^{\infty}(X, T(X))$ も $C^{\infty}(X, T^*(X))$ も，各点での和とスカラー倍の演算によって実数体上のベクトル空間をなす．たとえば，$V_1, V_2\in C^{\infty}(X, T(X))$ ならば，V_1+V_2 は $(V_1+V_2)(x)=V_1(x)+V_2(x)$ により，また，$\lambda\in R^1$ ならば，λV_1 は $(\lambda V_1)(x)=\lambda(V_1(x))$ により定義される．

3． 座標関数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ をもつ X 上の座標系を φ, その定義域を U とする．このとき，

（1） $i\in\{1, \cdots, n\}$ に対して $(\partial/\partial x_i)\in C^{\infty}(U, T(U))$ である．$\partial/\partial x_i$ が滑らかであるのは次のことによる．

$$f\in C^{\infty}(U, R^1) \quad \text{ならば} \quad f\circ\varphi^{-1}\in C^{\infty}(\varphi(U), R^1)$$

であり，また各 $x\in U$ に対して

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right](x)=\left[\frac{\partial}{\partial r_i}(f\circ\varphi^{-1})\right](\varphi(x))=\left[\left[\frac{\partial}{\partial r_i}(f\circ\varphi^{-1})\right]\circ\varphi\right](x).$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f)=\left[\frac{\partial}{\partial r_i}(f\circ\varphi^{-1})\right]\circ\varphi\in C^{\infty}(U, R^1).$$

（2） $V\in C^{\infty}(U, T(U))$ ならば，$i\in\{1, \cdots, n\}$ に対し $V=\sum_{i=1}^{n} a_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ な

---

1) ［訳注］ ここでは，記号 $C^{\infty}(X, T(X))$ は，X から $T(X)$ への滑らかな写像全体ではない．$C^{\infty}(X, T^*(X))$ も同様である．

る関数 $a_i \in C^\infty(U, R^1)$ が存在する．これらの関数 a_i が存在するのは，

$$\{(\partial/\partial x_i)(x)\}_{i\in\{1,\cdots,n\}}$$

が $T(X, x)$ の基底をなすからであり，また，それらが滑らかであるのは，$(\partial/\partial x_i)(x_j)=\delta_{ij}$ で

$$a_j=\sum_{i=1}^n a_i\delta_{ij}=\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j)=V(x_j)\in C^\infty(U, R^1)$$

となるからである．

（3） $V\in C^\infty(X, T(X))$ ならば，前の問題より $V|_U\in C^\infty(U, T(U))$ であり，(2)のように，$V|_U=\sum_{i=1}^n a_i(\partial/\partial x_i)$，$a_i\in C^\infty(U, R^1)$ である．

（4） $j\in\{1, \cdots, n\}$ に対して，$x_j\in C^\infty(U, R^1)$ であるから

$$dx_j\in C^\infty(U, T^*(U)).$$

さらに $dx_j\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_j)=\delta_{ij}$ であるから，$\{dx_j\}$ は各点において $\{\partial/\partial x_j\}$ に対する双対基底である．

（5） $\omega\in C^\infty(U, T^*(U))$ ならば，$\omega=\sum_{n=1}^n a_i dx_i$ なる $a_i\in C^\infty(U, R^1)$ が存在する．これらの関数 a_i が存在するのは $\{dx_i\}$ が各点における余接空間の基底だからであり，それらが滑らかであるのは

$$a_i=\sum a_j dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\in C^\infty(U, R^1)$$

となるからである．

（6） $f\in C^\infty(U, R^1)$ ならば

$$df=\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}(f)dx_j.$$

なぜならば，ある a_j に対して $df=\sum_{j=1}^n a_j dx_j$ であり，かつ

$$a_i=\sum_{j=1}^n a_j dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}(f)$$

であるからである．

これまで見てきたように，$f\in C^\infty(X, R^1)$ ならば df は滑らかな1-形式である．次に微分 k-形式を導入しよう．

外積代数の復習　V を実数体上の n-次元ベクトル空間とすると，

（1） ベクトル空間 $\Lambda^k(V^*)$ は V 上のすべての歪対称な k 重線形汎関数の空間である．すなわち，各 $\tau\in\Lambda^k(V^*)$ は，写像 τ: $\underbrace{V\oplus\cdots\oplus V}_{k\text{ 個}}\to R^1$ で，す

べての $v_1, \cdots, v_k,\ v_j' \in V,\ \lambda \in R^1$ に対して

1) $\tau(v_1, \cdots, v_{j-1}, v_j+v_j', v_{j+1}, \cdots, v_k)$
$=\tau(v_1, \cdots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \cdots, v_k)+\tau(v_1, \cdots, v_{j-1}, v_j', v_{j+1}, \cdots, v_k)$

2) $\tau(v_{\pi(1)}, \cdots, v_{\pi(k)})=(-1)^{\pi}\tau(v_1, \cdots, v_k)$

3) $\tau(v_1, \cdots, v_{j-1}, \lambda v_j, v_{j+1}, \cdots, v_k)=\lambda\tau(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_k)$

である．ただし π は k 個の文字の置換群 S_k の任意の元であり，$(-1)^{\pi}$ は π が偶置換ならば $+1$，π が奇置換ならば -1 とする．2)は，τ の変数である2つのベクトルを入れかえたとき，τ の値の符号がかわることと同値である．$\Lambda^k(V^*)$ の次元は $k\leq n$ に対しては二項係数 $\binom{n}{k}$ に等しく，$k>n$ に対しては0である．

（2） $\Lambda^0(V^*)=R^1$，$\mathcal{G}(V^*)=\sum_{k=0}^{n}\oplus\Lambda^k(V^*)$ とおいたとき，$\mathcal{G}(V^*)$ 上の積が次のように定義される．$\tau\in\Lambda^k(V^*)$，$\mu\in\Lambda^l(V^*)$ に対して，積 $\tau\wedge\mu$ は $\Lambda^{k+l}(V^*)$ の元で

$$(\tau\wedge\mu)(v_1, \cdots, v_{k+l})$$
$$=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}(-1)^{\pi}\tau(v_{\pi(1)}, \cdots, v_{\pi(k)})\mu(v_{\pi(k+1)}, \cdots, v_{\pi(k+l)})$$

により定義される．

$\mathcal{G}(V^*)$ はこのような μ と τ から生成されているから，この積を $\mathcal{G}(V^*)$ に線形に拡張する．すなわちベクトルの和に関して，外積∧は分配律を満たす．またこの積は結合律を満たし，$\mathcal{G}(V^*)$ は単位元1をもつ多元環である．しかし積は可換ではない．すなわち $\mu\in\Lambda^k(V^*)$，$\tau\in\Lambda^l(V^*)$ なら $\mu\wedge\tau=(-1)^{kl}\tau\wedge\mu$.

（3） $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ が V^* の基底ならば

$$[\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_k};\ 1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n]$$

は $\Lambda^k(V^*)$ の基底である．したがって，k を1から n まで動かしたこれらの集合の全体と $1\in\Lambda^0(V^*)$ を合わせたものが $\mathcal{G}(V^*)$ の基底をなす．これより $\mathcal{G}(V^*)$ の次元が 2^n であることがわかる．

$v_1, \cdots, v_k\in V$ ならば，これらのベクトルにおける $\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_k}$ の値は

$$(\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_k})(v_1, \cdots, v_k)=\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^{\pi}\varphi_{i_1}(v_{\pi(1)})\cdots\varphi_{i_k}(v_{\pi(k)})$$

により与えられる．

（4） $\mathcal{G}(V^*)$ は次の性質をもつ．

1) $1\in\mathcal{G}(V^*)$，$V^*\subset\mathcal{G}(V^*)$，

2) $\mathcal{G}(V^*)$ は1と V^* により生成される，

3) $\varphi \in V^*$ ならば $\varphi \wedge \varphi = 0$,

4) $\mathcal{G}(V^*)$ の次元$=2^n$.

実は，これらの性質が $\mathcal{G}(V^*)$ を特徴づける．すなわち，$\tilde{\mathcal{G}}(V^*)$ が性質1)～4)を満たす実数体上の任意の多元環ならば，$\tilde{\mathcal{G}}(V^*)$ と $\mathcal{G}(V^*)$ は(多元環として)同型である．

3)は $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ に対し $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = -\varphi_2 \wedge \varphi_1$ であるという条件と同値である．

(5) $L: V^* \to V^*$ が線形変換であれば，L は一意的に写像 L の拡張である多元環の準同型 $\tilde{L}: \mathcal{G}(V^*) \to \mathcal{G}(V^*)$ を誘導する．$\tilde{L}$ は次数を保つ．すなわち，$\tilde{L}: \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$ である．特に，$\tilde{L}: \Lambda^n(V^*) \to \Lambda^n(V^*)$ であり，また ($\Lambda^n(V^*)$の次元)$=1$ だから，$\tilde{L}|_{\Lambda^n(V^*)} = \lambda \cdot 1$[1] なるスカラー λ が存在する．このスカラー λ はちょうど L の行列式 $\Delta(L)$ である．

(6) 多元環 $\mathcal{G}(V^*)$ を V^* 上の**グラスマン代数**あるいは**外積代数**とよぶ．$\mathcal{G}(V^*)$ の元を V 上の**形式**とよぶ．$\Lambda^k(V^*)$ に属する形式を**次数** k の形式という．

(外積代数の復習はこれで終る.)

いま，X を滑らかな多様体とし，

$$\Lambda^k(X) = \bigcup_{x \in X} \Lambda^k(T^*(X, x)), \qquad \mathcal{G}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{G}(T^*(X, x))$$

とする．いつものように，これらの空間から X の上への射影を π と表わそう．これらの空間には，それぞれ π を滑らかな写像とするような，滑らかな多様体の構造を与えることができる．

定義 X 上の **k-形式**とは，$\pi \circ \mu = i_X$ なる写像 $\mu: X \to \Lambda^k(X)$ のことである．X 上の k-形式 μ が**滑らか**とは，$V_1, \cdots, V_k$ が X 上の滑らかなベクトルであれば，

$$\mu(V_1, \cdots, V_k) \in C^\infty(X, R^1)$$

$$[\text{ただし} \quad \mu(V_1, \cdots, V_k)(x) = \mu(x)(V_1(x), \cdots, V_k(x))]$$

となることである．また X 上の**微分形式**とは，$\pi \cdot \omega = i_X$ なる写像 $\omega: X \to \mathcal{G}(X)$ のことであり，それが**滑らか**とは，各 k に対して，その $\Lambda^k(X)$ における成分が滑らかであることである．X 上の滑らかな k-形式全体の集合を $C^\infty(X, \Lambda^k(X))$，滑らかな微分形式全体の集合を $C^\infty(X, \mathcal{G}(X))$ と書く．$C^\infty(X, \Lambda^k(X))$ は各点ごとの和とスカラー倍のもとでベクトル空間となり，$C^\infty(X, \mathcal{G}(X))$ は各点ごとの外積の演算を付加することにより多元環となる．

---

1) [訳注] ここで，1 は $\Lambda^n(V^*)$ の恒等写像を表わしている．

注意 1 X 上の0-形式は X 上の実数値関数である．0-形式が滑らかであるための必要十分条件は，この実数値関数が滑らかなことである．

注意 2 φ を，定義域 U と座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ X 上の局所座標系とする．このとき $\{dx_1, \cdots, dx_n\}$ は，各 $x \in U$ に対して $T^*(X, x)$ の基底である．したがって，各 $x \in U$ に対して

$$[dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k};\ i_1 < \cdots < i_k]$$

が $\Lambda^k(T^*(X, x))$ の基底になる．したがって，X 上の各 k-形式 μ の U への制限は

$$\mu|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

と表わせる．ただし各 $a_{i_1 \cdots i_k}$ は，U 上の実数値関数である．さらに，μ が滑らかであるための必要十分条件は，各 (φ, U) に対して $a_{i_1 \cdots i_k} \in C^\infty(U, R^1)$ となることである．このことは，次式よりわかる．

$$a_{i_1 \cdots i_k} = k!\,\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right).$$

定理 1 X が滑らかな多様体であるとき，次の性質をもつ線形写像 $d: C^\infty(X, \mathcal{G}(X)) \to C^\infty(X, \mathcal{G}(X))$ が一意的に存在する（この写像は**外微分**とよばれる）．

（1） $d: C^\infty(X, \Lambda^k(X)) \to C^\infty(X, \Lambda^{k+1}(X))$,

（2） $f \in C^\infty(X, \Lambda^0(X))$ に対して $d(f) = df$（普通の微分），

（3） $\mu \in C^\infty(X, \Lambda^k(X))$，$\tau \in C^\infty(X, \mathcal{G}(X))$ ならば

$$d(\mu \wedge \tau) = (d\mu) \wedge \tau + (-1)^k \mu \wedge d\tau,$$

（4） $d^2 = 0$.

注意 この定理を証明するために次の補題が必要である．これにより，任意の外微分作用素 d に対し，$(d\omega)(x)$ が x の小さな近傍における ω の様子にのみ依存することがいえる．

補題 $d: C^\infty(X, \mathcal{G}(X)) \to C^\infty(X, \mathcal{G}(X))$ を線形かつ定理の条件を満たすものとする．$\omega \in C^\infty(X, \mathcal{G}(X))$ が，ある開集合 $W \subset X$ に対して $\omega|_W = 0$ ならば，$(d\omega)|_W = 0$ である．したがって，$\omega, \tau \in C^\infty(X, \mathcal{G}(X))$ が，ある開集合 W に対して $\omega|_W = \tau|_W$ を満たすならば，$(d\omega)|_W = (d\tau)|_W$ である．

証明 $\omega|_W = 0$，$x_0 \in W$ とする．$f \in C^\infty(X, R^1)$ は $f(x_0) = 1$ かつすべての $x \notin W$ に対して $f(x) = 0$ であるとする．このとき，$f\omega$ は X 上で恒等的に 0 であり，したがって

$$0 = d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f d\omega.$$

ゆえに，x_0 では $(d\omega)(x_0) = 0$．このことがすべての $x_0 \in W$ に対して成り立つ

から, $d\omega|_W=0$. $\omega|_W=\tau|_W$ ならば $(\omega-\tau)|_W=0$. したがって, $0=[d(\omega-\tau)]|_W=[d\omega-d\tau]|_W$ となり $d\omega|_W=d\tau|_W$. ▩

定理 1 の証明

一意性 $d: C^\infty(X, \mathcal{G}(X))\to C^\infty(X, \mathcal{G}(X))$ が定理の条件を満たすと仮定する. $x\in X$ とし, φ を定義域が U で座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ x のまわりの局所座標系とする. $\omega\in C^\infty(X, \Lambda^k(X))$ とすると, ω の U への制限は, ある $a_{i_1\cdots i_k}\in C^\infty(U, R^1)$ に対して

$$\omega|_U=\sum a_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

と表わせる. さて, この関係式の右辺は X 上の微分形式ではないので, それに d を作用させることはできない. しかしながら, U_1 を, x を含む開球で $\overline{U_1}$ はコンパクトかつ $\subset U$ であるものとし, $g\in C^\infty(X, R^1)$ を $x\in U_1$ に対して $g(x)=1$, かつ $x\notin U$ に対して $g(x)=0$ であるものとする. このとき

$$\tilde{\omega}=\sum(ga_{i_1\cdots i_k})d(gx_{i_1})\wedge\cdots\wedge d(gx_{i_k})$$

とすれば, $\tilde{\omega}\in C^\infty(X, \Lambda^k(X))$.

ここで, $h\in C^\infty(U, R^1)$ に対して, gh は

$$(gh)(x)=\begin{cases} g(x)h(x) & (x\in U)\\ 0 & (x\notin U)\end{cases}$$

により定義された X 上の滑らかな関数を意味する. さらに, $\tilde{\omega}|_{U_1}=\omega|_{U_1}$ であるから, 補題より $(d\omega)|_{U_1}=(d\tilde{\omega})|_{U_1}$. さて,

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}&=\sum d[ga_{i_1\cdots i_k}d(gx_{i_1})\wedge\cdots\wedge d(gx_{i_k})] && \text{(線形性より)}\\ &=\sum d(ga_{i_1\cdots i_k})\wedge d(gx_{i_1})\wedge\cdots\wedge d(gx_{i_k})\\ &\quad+\sum ga_{i_1\cdots i_k}d(d(gx_{i_1})\wedge\cdots\wedge d(gx_{i_k})) && \text{(性質(3)より)}\\ &=\sum d(ga_{i_1\cdots i_k})\wedge d(gx_{i_1})\wedge\cdots\wedge d(gx_{i_k}). \end{aligned}$$

ただし, 2番目の和の各項が 0 となるのは性質(3)と(4)による. 特に, g が U_1 上で恒等的に 1 であることと, $(d\omega)|_{U_1}=(d\tilde{\omega})|_{U_1}$ より

$$(d\omega)|_{U_1}=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i_1\cdots i_k})dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

したがって, d が存在するならば, x における k-形式の値は上の式により与えられる. x は X において任意であったし, あらゆる微分形式は k-形式, $k\in\{0, 1, \cdots, n\}$ の和であるから, d は一意的にきまる.

存在 まず d を局所的に定義する. φ を, 定義域が U で座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ X 上の局所座標系とする(U 自身, 滑らかな多様体であることに注

意せよ）．d_U：$C^\infty(U, \mathcal{G}(U)) \to C^\infty(U, \mathcal{G}(U))$ を次のように定義する．

$$\omega = \sum a_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \in C^\infty(U, \Lambda^k(U))$$

に対して

$$\boxed{d_U\omega = \sum\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i_1\cdots i_k})dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}}$$

とする．d_U を $C^\infty(U, \mathcal{G}(U))$ へ線形に拡張する．このとき明らかに性質(1)，(2)は満たされる．(3)，(4)を確かめるには，まず $C^\infty(U, \mathcal{G}(U))$ の各形式は，$a_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ という形の形式の和であることに注意する．d の線形性と，和に関する外積の分配性とにより，この形の形式についてのみ確かめれば十分である．

性質(3) $\mu = a_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$，　$\tau = b_{j_1\cdots j_l}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}$

と仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}
d(\mu\wedge\tau) &= d[a_{i_1\cdots i_k}b_{j_1\cdots j_l}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}] \\
&= \sum_{r=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k})b_{j_1\cdots j_l} + a_{i_1\cdots i_k}\frac{\partial}{\partial x_r}(b_{j_1\cdots j_l})\right]dx_r\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l} \\
&= \left(\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k})dx_r\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right)\wedge(b_{j_1\cdots j_l}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}) \\
&\quad + (-1)^k(a_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}) \\
&\qquad \wedge\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_r}(b_{j_1\cdots j_l})dx_r\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}\right) \\
&= (d\mu)\wedge\tau + (-1)^k\mu\wedge d\tau.
\end{aligned}$$

性質(4) $\mu = a_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$

に対して，

$$\begin{aligned}
d^2\mu &= d\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k})dx_r\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right] \\
&= \sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_s}\left[\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k})\right]dx_s\wedge dx_r\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.
\end{aligned}$$

ところが，$dx_r\wedge dx_r = 0$ だから，この式において $r=s$ の項は確かに 0 である．さらに $r\neq s$ に対しては，よく知られた R^n における偏微分の性質より

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k}) = \frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial}{\partial x_s}(a_{i_1\cdots i_k})$$

が成り立つから

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k})dx_s\wedge dx_r = -\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial}{\partial x_s}(a_{i_1\cdots i_k})dx_r\wedge dx_s.$$

したがって，$r \neq s$ の項は対になって互いに消し合う．

以上より，作用素 d_U は性質(1)～(4)をもつことがわかった．一意性より，$C^\infty(U, \mathcal{G}(U))$ 上でこれらの性質をもつ任意の線形作用素は，四角で囲まれた式により与えられる．特に U_1 が U の任意の開部分集合ならば，$\varphi|_{U_1}$ は座標系であり，d_{U_1}: $C^\infty(U_1, \mathcal{G}(U_1)) \to C^\infty(U_1, \mathcal{G}(U_1))$ は座標系 $\varphi|_{U_1}$ においても dU と同じ式で与えられる．したがって，$\omega \in C^\infty(X, \mathcal{G}(X))$ ならば

$$d_{U_1}(\omega|_{U_1}) = (d_U(\omega|_U))|_{U_1}.$$

この関係は，すべての $\omega \in C^\infty(X, \mathcal{G}(X))$ に対して，任意の座標近傍 U 上で $(d\omega)|_U = d_U(\omega|_U)$ とすることによって，d を大域的に定義してよいことを示している．なぜなら，この関係より U と V が重なる座標近傍であるとき，

$$(d_U(\omega|_U))|_{U\cap V} = d_{U\cap V}(\omega|_{U\cap V}) = (d_V(\omega|_V))|_{U\cap V}$$

が成り立つから，この d が定義可能である．各 U に対して，d_U が要求された性質をすべてもつことから，d もまたその性質をもつことは明らかである．▨

ベクトル解析に関する余談　いままで述べてきた多重線形代数は $n=3$ の場合特に単純である．ベクトル解析の古典的なアプローチが，どのように微分形式の理論と対応しているかを示そう．その関連を述べるために，まず n 次元ベクトル空間 T の一般的な場合について考える．

定義　T の**体積要素**とは，$\Lambda^n(T^*)$ における基底の選び方をいう．$\Lambda^n(T^*)$ は1次元だから，体積要素は $\Lambda^n(T^*)$ の0以外の元の選び方である．

例　T が多様体の接空間で，$\{dx_1, \cdots, dx_n\}$ が T^* の基底であるならば，$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ は T の体積要素である．（体積要素 ω が，$r\omega$ を r に対応させる同型写像 $\Lambda^n(T^*)\cong R^1$ を決定することに注意せよ．逆に，そのような同型写像は1に対応する体積要素 ω を定義する．）

注意1　T の体積要素 ω が与えられると，次のように定義される自然な同型写像 m: $\Lambda^{n-1}(T^*) \to T$ が存在する．T は2度双対空間をとった T^{**} に自然に同型である．T と T^{**} をこの同型によって同一視すると，m は T^{**} 内に値をもつ．$\varphi \in \Lambda^{n-1}(T^*)$ に対し，$m(\varphi)$ を $[m(\varphi)](\phi)=\lambda$ により定義する．ただし $\phi \in T^*$ で，λ は $\varphi\wedge\phi=\lambda\omega$ なる実数である．m が同型写像であることを示そう．まず，$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ を $\omega=\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$ である T^* の基底とする．このとき，集合 $\{\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_{j-1}\wedge\varphi_{j+1}\wedge\cdots\wedge\varphi_n\}$ は $\Lambda^{n-1}(T^*)$ の基底である．これらの基底ベクトル上での m の値は

$$m(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_{j-1}\wedge\varphi_{j+1}\wedge\cdots\wedge\varphi_n) = (-1)^{n+j}e_j$$

により与えられる．ここで，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ は $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ に双対な T の基底である．

注意2　有限次元ベクトル空間 T 上に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられたとき，

$$[g(v)](w)=\langle v, w\rangle \qquad (v, w \in T)$$

により定義された自然な同型写像 $g: T \to T^*$ が存在する．$\{e_1, \cdots, e_n\}$ を T の基底とし，$g_{ij}=\langle e_i, e_j\rangle$ $(i, j \in \{1, \cdots, n\})$ とおくと，T^* の双対基底 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ に対して

$$g(e_i)=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\varphi_j \qquad (i \in \{1, \cdots, n\}).$$

特に，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ が正規直交系ならば，$g_{ij}=\delta_{ij}$ で

$$g(e_i)=\varphi_i.$$

応用　$T=R^n$ とする．このとき T は内積と自然な体積要素 $\omega=\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$ をもつ．ただし，$\{\varphi_i\}$ は R^n の自然な基底 $\{e_i\}$ の双対基底である．これより同型写像 m と g が定義される．また，各 $x \in R^n$ に対して，自然な同一視 $T(R^n, x) \leftrightarrow R^n$ がある．

1．$f \in C^\infty(R^n, R^1)$ とする．このとき，f の**勾配**(grad f)とは，

$$\boxed{\operatorname{grad} f=g^{-1}\circ(df)}$$

により与えられる R^n 上のベクトル場である．R^n 上の普通の座標 $(x_1, \cdots, x_n)=(r_1, \cdots, r_n)$ に関して，

$$\operatorname{grad} f=g^{-1}\circ(df)=g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j} \longleftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

2．V を R^3 上のベクトル場とする．このとき $g\circ V$ は1-形式で，$d(g\circ V)$ は2-形式である．T の次元は3だから，$\Lambda^2(T^*)=\Lambda^{n-1}(T^*)$．したがって同型写像 m は写像 $\Lambda^2(T^*)\to T$ である．$m(d(g\circ V))$ は R^3 上のベクトル場であり，V の**回転**(curl V)とよばれる．

$$\boxed{\operatorname{curl} V=(m\circ d\circ g)(V)}$$

問題　curl V を座標を用いて表わせ．

3．v_1, v_2 を R^3 のベクトルとする．このとき $g(v_1), g(v_2)$ は1-形式である．それらの外積は2-形式であり，その m による像はベクトルである．これを v_1 と v_2 の**ベクトル積**とよび，$v_1\times v_2$ と表わす．

$$\boxed{v_1\times v_2=m(g(v_1)\wedge g(v_2))}$$

4．V を R^n 上のベクトル場とする．このとき $m^{-1}(V)$ は R^n 上の $(n-1)$-形式であり，それの微分は n-形式である．すなわち，体積要素のスカラー倍である．このスカラーが(符号の違いを除けば) V の**発散**(div V)である．

$$\boxed{(-1)^{n-1}d\circ m^{-1}(V)=(\operatorname{div} V)\omega}$$

これらの式と，$d^2=0$ という事実を用いれば，ベクトル解析の重要な公式が簡単に導かれる．

A. $$\text{curl grad} f=0$$

なぜならば

$$\text{curl grad} f=m\circ d\circ g(g^{-1}\circ d(f))=m(d^2 f)=0.$$

B. $$\text{div curl} V=0$$

なぜならば

$$d\circ m^{-1}(\text{curl } V)=d\circ m^{-1}(m\circ d\circ g(V))=d^2(g(V))=0.$$

（ベクトル解析に関する余談はこれで終る.）

定義 X と Y を滑らかな多様体とし，Ψ: $X\to Y$ を滑らかな写像とする．このとき，**誘導写像** Ψ^*: $C^\infty(Y, \mathcal{G}(Y))\to C^\infty(X, \mathcal{G}(X))$ が次のように定義される．$f\in C^\infty(Y, \Lambda^0(Y))$ に対して $\Psi^*(f)=f\circ\Psi$，かつ $\omega\in C^\infty(Y, \Lambda^k(Y))$ $(k>0)$ に対して

$$(\Psi^*\omega)(x)(v_1, \cdots, v_k)=\omega(\Psi(x))(d\Psi(v_1), \cdots, d\Psi(v_k))$$
$$(v_1, \cdots, v_k\in T(X, x),\ x\in X).$$

Ψ^* は線形性より $C^\infty(Y, \mathcal{G}(Y))$ 上に拡張される．

注意 ω が滑らかな微分形式なら，$\Psi^*\omega$ も滑らかな微分形式であることは容易に確かめられる．Ψ^* が k-形式を k-形式に写すことは明らかである．Ψ^* が多元環の準同型であることも容易に確かめられる．すなわち，Ψ^* は線形で，かつすべての ω, τ に対して

$$\Psi^*(\omega\wedge\tau)=(\Psi^*\omega)\wedge(\Psi^*\tau).$$

定理 2 X と Y を滑らかな多様体とし，Ψ: $X\to Y$ を滑らかな写像とする．このとき，

$$d\circ\Psi^*=\Psi^*\circ d.$$

証明

（1） $f\in C^\infty(Y, \Lambda^0(Y))$ ならば，$v\in T(X, x)$ に対して

$$\begin{aligned}[d\circ\Psi^*(f)](v)&=[d(f\circ\Psi)](v)\\&=[df\circ d\Psi](v) \qquad \text{（関数に対しては } d \text{ は普通の微分だから）}\\&=[\Psi^*(df)](v)\\&=[(\Psi^*\circ d)(f)](v).\end{aligned}$$

（2） $\omega=df$ という形の Y 上の 1-形式 ω に対しては，

$$(d\circ\Psi^*)(\omega)=d(\Psi^*(df))$$

$$
\begin{aligned}
&= d(\Psi^* \circ d(f)) \\
&= d(d \circ \Psi^*(f)) \qquad ((1)\text{より}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

また,

$$(\Psi^* \circ d)(\omega) = \Psi^*(d\omega) = \Psi^*(ddf) = \Psi^*(0) = 0.$$

(3) (1), (2)と, Ψ^* が多元環の準同型であることを用いれば, 証明すべき結論は, 局所座標近傍に制限した k-形式

$$\omega|_U = \sum a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

について確かめることにより, 一般に成り立つことがいえる. (詳細は読者に任せる.) ▓

定義 X を滑らかな多様体とする. X 上の滑らかな微分形式 ω が $d\omega=0$ のとき, ω は**閉**であるという. ω が X 上のある微分形式の微分であるとき, ω は**完全**であるという. すなわち, ある滑らかな形式 τ に対し, $\omega = d\tau$ であるとき ω は完全であるという. ($d^2=0$ より, すべての完全形式は閉であることに注意せよ. 逆が成り立つかどうかは今後の主要な課題である.)

$Z^k(X, d)$ を X 上のすべての閉 k-形式からなるベクトル空間とする. $B^k(X, d)$ を X 上のすべての完全 k-形式からなるベクトル空間とする. このとき $d^2=0$ より $B^k(X, d) \subset Z^k(X, d)$. $H^k(X, d) = Z^k(X, d)/B^k(X, d)$ とおいたものを, X の k 次**ド・ラム コホモロジー群**とよぶ. これもベクトル空間となるが, その次元はコンパクトな X に対しては有限であり, k 次の**ベッチ数**といわれる.

注意 コホモロジー群は X の多様体の構造を用いて定義されたが, 実は位相不変量である. すなわち, 2つの多様体が同相ならば(滑らかな同相写像によらなくてもよい), それらは同型なコホモロジー群をもつ. 実は, これらの群は X の位相構造のみから直接定義できるのである.

例 1 X が連結ならば, $H^0(X, d) \cong R$. なぜならば, 次数<0なる形式は存在しないから, $B^0(X, d)=0$. したがって

$$H^0(X, d) = Z^0(X, d) = [f \in C^\infty(X, R^1)\,;\, df=0].$$

U を X の任意の座標近傍とし, 座標関数を $(x_1, \cdots, x_n)$ としたとき, U 上で $df=0$ ということは,

$$0 = df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(f) dx_i$$

すなわち，すべての i に対して $(\partial/\partial x_i)(f)=0$. これより f は U 上で定値である．X が連結で，さらに X の各座標近傍において f が定値であることから，f は X 上で定値である．したがって，$Z^0(X, d)=[X$ 上の定値関数$]\cong R^1$.

例 2 S^1 を円周とすると，$H^1(S^1, d)\cong R^1$. これは，まず $k>1$ に対して S^1 上には 0 でない k-形式が存在しないことより，$Z^1(S^1, d)=C^\infty(S^1, \Lambda^1(S^1))$. また，

$$B^1(S^1, d)=[df;\ f\in C^\infty(S^1, R^1)].$$

ここで θ を S^1 上の極座標とすれば，$\partial/\partial\theta$ は S^1 上の 0 でないベクトル場で，それに双対な 1-形式 $d\theta$ は S^1 上の 0 でない 1-形式である(図 5.4)．ところが $d\theta$ は完全ではない(記号にもかかわらず!)が，任意の S^1 上の 1-形式 $\omega=g(\theta)d\theta$ に対して，ある $c\in R^1$ をとると $\omega-(cd\theta)$ は完全である．したがって

$$Z^1(S^1, d)/B^1(S^1, d)\cong[cd\theta;\ c\in R^1]\cong R^1.$$

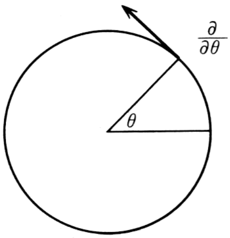


図 5.4

問題 例2の中の，「$d\theta$ は完全ではないこと」および「任意の S^1 上の 1-形式 $\omega=g(\theta)d\theta$ に対して，ある $c\in R^1$ をとると，$\omega-(cd\theta)$ は完全であること」を確かめよ．$\left(\text{ヒント：} c=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta \text{ とおけ.}\right)$

さて $\phi: X\to Y$ が滑らかであれば

$$\phi^*: Z^k(Y, d)\to Z^k(X, d),\qquad \phi^*: B^k(Y, d)\to B^k(X, d).$$

なぜならば，ω を Y 上の閉 k-形式とすると $d(\phi^*\omega)=\phi^*(d\omega)=\phi^*(0)=0$. $\omega=d\tau$ を Y 上の完全 k-形式とすれば $\phi^*(\omega)=\phi^*(d\tau)=d(\phi^*(\tau))$. したがって ϕ^* はコホモロジー群の線形写像 $\tilde{\phi}$ を誘導する．

$$\tilde{\phi}: Z^k(Y, d)/B^k(Y, d)\to Z^k(X, d)/B^k(X, d)$$

すなわち，

$$\tilde{\phi}: H^k(Y, d)\to H^k(X, d).$$

$S: W\to X$ と $T: X\to Y$ が滑らかならば，$(T\circ S)^*=S^*\circ T^*$ であることは容易に確かめられ，これより $\widetilde{(T\circ S)}=\tilde{S}\circ\tilde{T}$ がいえる．

$$W \xrightarrow{S} X \xrightarrow{T} Y$$
$$H^k(W, d) \xleftarrow{\tilde{S}} H^k(X, d) \xleftarrow{\tilde{T}} H^k(Y, d)$$

このように，滑らかな各多様体 X に対して新しい代数的な不変量 $H^k(X, d)$ を考えたが，多様体の間の滑らかな写像に対して，この代数的な対象の間に代数的写像が誘導されることがわかった．基本群の場合と同じく，いくつかの難解な位相的問題をそれらの代数的な対応を研究することによって解決することができる．

さて，すべての $k>0$ に対して $H^k(R^n, d)=0$ であることを示そう．R^n は R^n の原点のまわりの単位球体 $B_0(1)$ に微分同型(滑らかな多様体として同型)であることから，すべての k に対して $H^k(B_0(1), d)=0$ を示せばよい．このために，次の技巧的な補題を必要とする．

補題　X を滑らかな多様体とする．このとき，各 k に対して次の写像を考える．

$$C^\infty(X, \Lambda^{k-1}(X)) \underset{h_{k-1}}{\overset{d}{\rightleftarrows}} C^\infty(X, \Lambda^k(X)) \underset{h_k}{\overset{d}{\rightleftarrows}} C^\infty(X, \Lambda^{k+1}(X))$$

線形写像

$$h_j: C^\infty(X, \Lambda^{j+1}(X)) \to C^\infty(X, \Lambda^j(X)) \qquad (j=k-1 \text{ または } k)$$

で，$h_k \circ d + d \circ h_{k-1}$ が $C^\infty(X, \Lambda^k(X))$ 上の恒等写像となるものが存在すると仮定する．このとき，$H^k(X, d)=0$，すなわち，すべての閉 k-形式は完全である．

証明　$\omega \in C^\infty(X, \Lambda^k(X))$ を閉とする．このとき，

$$\omega=(h_k \circ d + d \circ h_{k-1})(\omega)=h_k(d\omega)+d(h_{k-1}\omega)=d(h_{k-1}\omega). \quad ▮$$

注意　すべての $j \geq 0$ に対して，そのような一連の線形写像 h_j が定義されたとき，列 h_j のことを**ホモトピー作用素**という．

定理 3　(ポアンカレの補題)　$U=B_0(1) \subset R^n$ とする．このときすべての $k>0$ に対して，$H^k(U, d)=0$.

証明　補題の条件を満たす写像 h_{k-1}, h_k を積分を用いて構成する．これらの写像は線形であるから，h_{k-1} を形式 $\omega=g dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ 上で定義すれば十分である．h_k に関しても同様である．ω に対して，

$$h_{k-1}(\omega)(x)=\left(\int_0^1 t^{k-1}g(tx)\,dt\right)\mu.$$

ここで,

$$\mu=x_{i_1}dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}-x_{i_2}dx_{i_1}\wedge dx_{i_3}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$
$$+\cdots+(-1)^{k-1}x_{i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k-1}}$$

とする($d\mu=k\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ に注意). 写像 h_k は, k を $k+1$ とおきかえて定義する.

さて, $\omega=g\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\in C^\infty(U,\Lambda^k(U))$ と $x\in U$ に対して

$$\begin{aligned}(d\circ h_{k-1})(\omega)(x)&=d\left[\left(\int_0^1 t^{k-1}g(tx)\,dt\right)\mu\right]\\&=\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_0^1 t^{k-1}g(tx)\,dt\right)dx_j\wedge\mu+\left(\int_0^1 t^{k-1}g(tx)\,dt\right)d\mu\\&=\sum_{j=1}^n\left(\int_0^1 t^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_j}(g(tx))\,dt\right)dx_j\wedge\mu+\left(\int_0^1 t^{k-1}g(tx)\,dt\right)d\mu\\&=\sum_{j=1}^n\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial g}{\partial x_j}(tx)\,dt\right)dx_j\wedge\mu\\&\quad+k\left(\int_0^1 t^{k-1}g(tx)\,dt\right)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}(h_k\circ d)(\omega)(x)&=h_k\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial g}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right)\\&=\sum_{j=1}^n\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial g}{\partial x_j}(tx)\,dt\right)[x_j dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}-dx_j\wedge\mu].\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}(d\circ h_{k-1}+h_k\circ d)(\omega)(x)&=\left[k\left(\int_0^1 t^{k-1}g(tx)\,dt\right)\right.\\&\quad\left.+\sum_{j=1}^n\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial g}{\partial x_j}(tx)x_j\,dt\right)\right]dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\&=\left\{\int_0^1\left[kt^{k-1}g(tx)+t^k\frac{d}{dt}(g(tx))\right]dt\right\}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\&=\left\{\int_0^1\frac{d}{dt}[t^k g(tx)]\,dt\right\}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\&=t^k g(tx)\big|_0^1 dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\&=g(x)\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\&=\omega(x)\qquad(\text{すべての } x\in U \text{ に対して}).\end{aligned}$$

$d\circ h_{k-1}+h_k\circ d$ は上のような ω に対して恒等写像として作用するので，線形性よりすべての k-形式に対しても恒等写像として作用する．▒

注意 1 この証明で用いた写像 h_{k-1} と h_k は天下り式に与えたものではなく，次のように構成されたものである．ベクトル空間 T と $v\in T$ が与えられたならば，v は，写像 $i(v)$: $\Lambda^k(T^*)\to\Lambda^{k-1}(T^*)$ を

$$[i(v)(\omega)](v_1,\cdots,v_{k-1})=\omega(v,v_1,\cdots,v_{k-1})$$

により定義する．i は双線形写像 $T\otimes\Lambda^k(T^*)\to\Lambda^{k-1}(T^*)$ である．この写像 i は**内部積**とよばれる．写像 h_{k-1} は ω に $i(x)$ を作用させてから，原点を通る方向 x の直線上で平均することにより得られる．

注意 2 定理3は，より一般的な次の定理の特別な場合にあたる．U を滑らかな多様体とする．滑らかな写像 Ψ: $U\times I_\varepsilon\to U$，ただし

$$I_\varepsilon=[r\in R^1;\ -\varepsilon<r<1+\varepsilon]$$

であって，

$$\begin{cases}\Psi(u,1)=u & (\text{すべての } u\in U)\\ \Psi(u,0)=u_0 & (\text{すべての } u\in U,\ \text{ある } u_0\in U)\end{cases}$$

を満たすものが存在すると仮定する．このとき，すべての $k>0$ に対して $H^k(U,d)=0$．写像 Ψ は「滑らかなホモトピー」である．このことは，U が1点に滑らかにホモトピックならば U のコホモロジーは1点のコホモロジーと同じである，ということをいっている．定理3の場合には，滑らかなホモトピーは

$$\Psi(x,t)=tx \qquad (t\in I_\varepsilon,\ x\in B_0(1))$$

により与えられる．上にあげたポアンカレの補題の証明は「星形領域」に対しても有効である．ただし，星形領域 U とは，ある $x_0\in U$ をとると，x_0 と，U の x_0 以外の任意の点を結ぶ線分が完全に U に含まれるような開集合のことである．

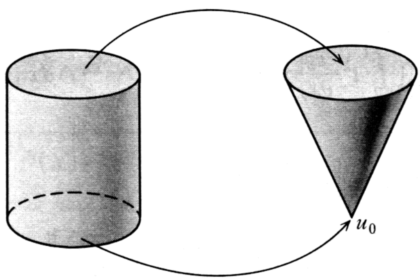


図 5.5

5.3 いろいろな結果

定理 1 X と Y を滑らかな多様体とし，X は連結で，ϕ: $X\to Y$ は滑らかであるとする．$d\phi\equiv0$ ならば ϕ は定値写像である．すなわち，すべての $x\in X$ に対して $\phi(x)=y_0\in Y$ である．

証明 $y_0 \in \phi(X)$ とする．このとき $\phi^{-1}(y_0)$ は X の閉集合．この集合が開でもあることを示す．そうすれば，X が連結であることから，$\phi^{-1}(y_0)=X$.

まず $x_0 \in \phi^{-1}(y_0)$ とする．$x_0 \in U$, $U \subset \phi^{-1}(y_0)$ である X の開集合 U を見つければ十分である． V を y_0 の座標近傍とし， 座標関数を $(y_1, \cdots, y_m)$ とする． U を x_0 の座標近傍で， $U \subset \phi^{-1}(V)$ であるものとする．$(x_1, \cdots, x_n)$ を U における座標関数とすれば， $T(X, x)$ の基底 $\{\partial/\partial x_i\}$ と $T(Y, \phi(x))$ の基底 $\{\partial/\partial y_i\}$ とに関する $d\phi(x)$[1]の行列は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(y_i \circ \phi)\right).$$

さて，$d\phi \equiv 0$ より，すべての i, j に対して U 上で $(\partial/\partial x_j)(y_i \circ \phi) \equiv 0$ である．ところが，このことより，すべての i に対して $y_i \circ \phi$ は U 上で定値である．したがって，すべての i とすべての $x \in U$ に対して $y_i \circ \phi(x) = y_i \circ \phi(x_0)$. すなわち，すべての $x \in U$ に対して $\phi(x) = \phi(x_0) = y_0$. これより $U \subset \phi^{-1}(y_0)$. ▩

定義 X を滑らかな多様体とし， V と W を X 上の滑らかなベクトル場とする．V と W の**ブラケット** $[V, W]$ とは

$$[V, W](f) = V(Wf) - W(Vf) \qquad (f \in C^\infty(X, R^1))$$

により定義された X 上の滑らかなベクトル場である．

さて， $[V, W]$ がベクトル場であることを示そう．φ を定義域 U と座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ局所座標系とする． このとき，ある $a_i, b_i \in C^\infty(U, R^1)$ に対して

$$V|_U = \sum_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \qquad W|_U = \sum_{i=1}^n b_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

$[V, W]$ は双線形であることから， $V = a(\partial/\partial x_i)$， $W = b(\partial/\partial x_j)$ のときのみ $[V, W]$ がベクトル場であることをいえばよい．偏微分の性質

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

から，

$$\begin{aligned}[V, W](f) &= a\frac{\partial}{\partial x_i}\left(b\frac{\partial}{\partial x_j}(f)\right) - b\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right) \\ &= a\frac{\partial}{\partial x_i}(b)\frac{\partial}{\partial x_j}(f) + ab\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}(f)\end{aligned}$$

---

1) ［訳注］ $d\phi(x)$ とは，$x \in X$ における ϕ の微分のことである．$d\phi|_x$ とも書く．

$$-b\frac{\partial}{\partial x_j}(a)\frac{\partial}{\partial x_i}(f)-ab\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(f)$$
$$=\left[a\frac{\partial}{\partial x_i}(b)\frac{\partial}{\partial x_j}-b\frac{\partial}{\partial x_j}(a)\frac{\partial}{\partial x_i}\right](f).$$

$a(\partial/\partial x_i)(b)$, $b(\partial/\partial x_j)(a)\in C^\infty(X, R^1)$ より，$[V, W]$ は滑らかなベクトル場である．

ベクトル場のブラケットは次の性質をもつ．いずれも容易に確かめられる．

（1）　$[V, W]=-[W, V]$,

（2）　$[V_1+V_2, W]=[V_1, W]+[V_2, W]$,

（3）　$[cV, W]=c[V, W]\qquad(c\in R^1)$,

（4）　$[[V, W], Z]+[[W, Z], V]+[[Z, V], W]=0.$

(4)は**ヤコビ恒等式**とよばれる．これら4つの性質から，$C^\infty(X, T(X))$ はブラケットの演算のもとで**リー環**となる．この多元環は結合律を満たさないことに注意せよ．

定理 2　ω を滑らかな1-形式とし，V と W を X 上の滑らかなベクトル場とする．このとき，
$$d\omega(V, W)=\tfrac{1}{2}\{V(\omega(W))-W(\omega(V))-\omega([V, W])\}.$$

注意　この式の1/2を除いてある本もある．これは外積の定義の仕方が異なるためである．

定理2の証明　局所座標近傍上でこの式を確かめれば十分である．さらに，両辺は ω に関して線形であることから，$\omega=fdg$ という形の形式においてのみ確かめればよい（すべての1-形式は局所的には $\sum a_i dx_i$ であるから）．$\omega=fdg$ に対して，

$$\begin{aligned}d\omega(V, W)&=(df\wedge dg)(V, W)\\&=\tfrac{1}{2}\{df(V)dg(W)-df(W)dg(V)\}\\&=\tfrac{1}{2}\{(Vf)(Wg)-(Wf)(Vg)\}.\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\{V(\omega(W))-W(\omega(V))-\omega([V, W])\}\\&=\tfrac{1}{2}\{V(fdg(W))-W(fdg(V))-fdg([V, W])\}\\&=\tfrac{1}{2}\{V(f(Wg))-W(f(Vg))-f([V, W]g)\}\\&=\tfrac{1}{2}\{(Vf)(Wg)+fV(Wg)-(Wf)(Vg)-fW(Vg)-fV(Wg)+fW(Vg)\}\\&=\tfrac{1}{2}\{(Vf)(Wg)-(Wf)(Vg)\}.\quad\blacksquare\end{aligned}$$

定理 3　（逆関数の定理）　X と Y を n 次元の滑らかな多様体とする．$\psi: X\to Y$ を滑らかな写像とする．点 $x_0\in X$ に対して

$$d\psi(x_0):\ T(X,\ x_0)\to T(Y,\ \psi(x_0))$$

が同型であるとする．このとき x_0 の近傍 U_0 が存在して，次を満たす．

（1）　$\psi|_{U_0}$ は単射，

（2）　$\psi(U_0)$ は Y で開，

（3）　$\psi^{-1}:\ \psi(U_0)\to U_0$ は滑らか．

証明　φ_2 を定義域 V と座標関数 $(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ をもつ $\psi(x_0)$ のまわりの座標系とする．x_0 のまわりの座標系 φ_1 を

$$U=(\mathrm{domain}\,\varphi_1)\subset\psi^{-1}(V)$$

となるように選ぶ．$(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ を φ_1 の座標関数としたとき，$T(X,\ x_0)$ の基底 $\{\partial/\partial x_i\}$ と $T(Y,\ \psi(x_0))$ の基底 $\{\partial/\partial y_i\}$ に関する $d\psi(x_0)$ の行列は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(y_i\circ\psi)\,|_{x_0}\right)$$

である．しかもこの行列は，$d\psi(x_0)$ が同型であることから，正則行列である．

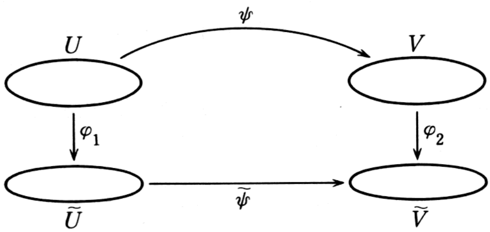


図 5.6

さて，φ_1 と φ_2 を用いて，以上すべてを R^n におきかえて考えよう．$\tilde{U}=\varphi_1(U)$，$\tilde{V}=\varphi_2(V)$ とおき，$\tilde{\psi}:\ \tilde{U}\to\tilde{V}$ を $\tilde{\psi}=\varphi_2\circ\psi\circ\varphi_1{}^{-1}$ とする．

このとき，$x\in\tilde{U}$ に対して $\tilde{\psi}(x)=(\tilde{\psi}_1(x),\ \cdots,\ \tilde{\psi}_n(x))$．ただし，$\tilde{\psi}_i=r_i\circ\tilde{\psi}$．$\tilde{\psi}$ の $\tilde{x}_0=\varphi_1(x_0)$ におけるヤコビ行列は

$$\left(\frac{\partial\tilde{\psi}_i}{\partial x_j}\bigg|_{\tilde{x}_0}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(y_i\circ\psi)\,|_{x_0}\right)$$

で正則である．したがって古典的な逆関数の定理より，$\tilde{x}_0$ を含む開集合 $\tilde{U}_0\subset\tilde{U}$ で，$\tilde{V}_0=\tilde{\psi}(\tilde{U}_0)$ が開であるようなものが存在し，しかも，方程式

$$\tilde{\psi}_i(r_1,\ \cdots,\ r_n)=s_i\qquad(i\in\{1,\ \cdots,\ n\})$$

は各 $(s_1, \cdots, s_n) \in \tilde{V}_0$ に対して $\tilde{U}_0$ に一意的な解をもつ．そのうえ，この解は $(s_1, \cdots, s_n)$ に関して滑らかである．いいかえれば，滑らかな関数

$$h_j\colon \tilde{V}_0 \to R^1 \qquad (j \in \{1, \cdots, n\})$$

で，各 $s=(s_1, \cdots, s_n) \in \tilde{V}_0$ に対して

$$\psi_i(h_1(s), \cdots, h_n(s)) = s_i \qquad (i \in \{1, \cdots, n\})$$

となるものが存在する．$s \in \tilde{V}_0$ に対して $h(s)=(h_1(s), \cdots, h_n(s))$ とおけば，$h=\tilde{\psi}^{-1}$．ここで X と Y に戻してみると，

$$U_0 = \varphi_1^{-1}(\tilde{U}_0)$$

が定理の条件を満足することがわかる．▮

定理 4（陰関数の定理）X と Y を滑らかな多様体で，$\dim X > \dim Y$ とする．$\phi\colon X \to Y$ を滑らかな写像とし，$y_0 \in \phi(X)$，

$$X_0 = \phi^{-1}(y_0) = [x \in X;\ \phi(x) = y_0]$$

とする．各 $x \in X_0$ に対して $d\phi(x)\colon T(X, x) \to T(Y, \phi(x))$ が全射であれば，X_0 は X における相対位相のもとで多様体の構造をもち，包含写像 $X_0 \to X$ は滑らかである．さらに，$\dim X_0 = \dim X - \dim Y$ である．

定理 4 を証明する前に，いくつかの応用を述べよう．

応用

（1）n 次元球面 S^n は，R^{n+1} から誘導された位相をもつ滑らかな多様体である．なぜなら $\phi\colon R^{n+1} \to R^1$ を，

$$\phi(r_1, \cdots, r_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} r_i^2$$

により定義すれば $S^n = \phi^{-1}(1)$．$\dim R^1 = 1$ より $\phi^{-1}(1)$ の各点で $d\phi \neq 0$ を確かめればよい．ところが $d\phi = 2\sum_{i=1}^{n+1} r_i dr_i$．$\{dr_1, \cdots, dr_{n+1}\}$ が 1 次独立であることから，すべての i に対して $r_i = 0$ でなければ $d\phi \neq 0$．したがって $\phi^{-1}(1)$ 上では $d\phi \neq 0$．$\dim S^n = \dim R^{n+1} - \dim R^1 = n$ である．

（2）$X = R^{n^2}$ を，実 $n \times n$ 行列全体からなる空間とみなす．$Y = R^1$ とし，$\phi\colon X \to Y$ を行列式関数とする．$\phi^{-1}(1)$ は行列式 1 の $n \times n$ 行列全体からなる群で，**特殊線形群**とよばれる．この群が多様体の構造をもつことをいうためには，$\phi^{-1}(1)$ の各点で $d\phi \neq 0$ を示せばよい．$(r_{ij}) \in R^{n^2}$ に対しては，

$$\phi(r_{ij}) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\pi} r_{1\pi(1)} \cdots r_{n\pi(n)}.$$

したがって，

$$d\phi=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\pi\in S_n}(-1)^{\pi}r_{1\pi(1)}\cdots r_{j-1\pi(j-1)}r_{j+1\pi(j+1)}\cdots r_{n\pi(n)}dr_{j\pi(j)}.$$

各 (i,j) に対して，この式の dr_{ij} の係数は，符号を除いて (r_{ij}) における r_{ij} の余因子行列の行列式である．$\phi^{-1}(1)$ の任意の点においてこれらの係数のどれかは 0 でない．なぜなら，その点においては，$\det(r_{ij})\neq 0$ ($\det(r_{ij})$ とは (r_{ij}) の行列式)である．$\{dr_{ij}\}$ が 1 次独立であることから $d\phi\neq 0$. したがって，特殊線形群の次元は n^2-1 である．

（3） (2)と同様に $X=R^{n^2}$ とする．Y を $n\times n$ 実対称行列全体からなる集合とする．Y は多様体である．なぜなら，Y は $R^{n(n+1)/2}$ と自然に同一視できる(対角線上の成分とそれより下の成分を横に並べるだけでよい)．ϕ: $X\to Y$ を $\phi(x)=xx^t$ と定義する．ここで x^t は各 $x\in X$ に対して x の転置行列を表わす．ϕ は滑らかである．これは $\phi(x)$ の各成分が x の成分の多項式であることからわかる．$X_0=\phi^{-1}(1)$ とする．ただし 1 は単位行列である．このとき，X_0 は $n\times n$ 直交行列全体からなる群である．X_0 を**直交群**という．

X_0 が多様体であることをいうために，各 $x\in X_0$ に対して $d\phi(x)$ が全射であることを示す．このためには，$d\phi(e)$ が全射であることがいえれば十分である(ただし $e=(\delta_{ij})$ は単位行列)．実際，$d\phi(e)$ が全射であったとして，$x\in X_0$ に対して，R_x: $X\to X$ を $R_x(y)=yx$ (行列の積)により定義する．R_x は滑らかな写像で，かつ滑らかな逆写像 $R_{x^{-1}}$ をもつ．したがって dR_x はすべての点において同型である．さらに，すべての $x\in X_0$ に対して $\phi\circ R_x=\phi$ である．なぜならば，$y\in X$ に対して

$$\phi\circ R_x(y)=\phi(yx)=(yx)(yx)^t=yxx^ty^t=yey^t=yy^t=\phi(y).$$

したがって

$$d\phi|_x=d(\phi\circ R_{x^{-1}})|_x=d\phi|_{R_{x^{-1}}(x)}\circ dR_{x^{-1}}|_x=d\phi|_e\circ dR_{x^{-1}}|_x.$$

これより，$d\phi(x)$ は全射である 2 つの写像の合成であることから全射である．

$d\phi(e)$ が全射であることを示そう．

$$(r_{ij}\circ\phi)(x)=\sum_{h=1}^{n}r_{ih}(x)r_{jh}(x)\qquad(1\leq i\leq j\leq n).$$

したがって，$1\leq k,\ l\leq n,\ 1\leq i\leq j\leq n$ に対する $d\phi(x)$ の行列の成分は，

$$\frac{\partial}{\partial r_{kl}}(r_{ij}\circ\phi)|_x=\begin{cases} r_{jl}(x) & (k=i\neq j)\\ r_{il}(x) & (k=j\neq i)\\ 2r_{il}(x) & (k=i=j)\\ 0 & (\text{その他}).\end{cases}$$

特に，$1\leq k,\ l\leq n$，$1\leq i\leq j\leq n$ に対する $d\phi(e)$ の行列の成分は，

$$\frac{\partial}{\partial r_{kl}}(r_{ij}\circ\phi)|_e=\begin{cases}1 & ((k,l)=(i,j),\ i\neq j)\\ 1 & ((k,l)=(j,i),\ i\neq j)\\ 2 & ((k,l)=(j,j))\\ 0 & (\text{その他}).\end{cases}$$

この行列の $k\leq l$ なる成分からなる正方小行列は対角行列で，対角成分は 1 と 2 である．これより $d\phi(e)$ の階数は $n(n+1)/2$．したがって，$d\phi(e)$ は全射である．$\dim X_0=\dim X-\dim Y=n(n-1)/2$ である．

（4） $X=n\times n$ 複素行列全体からなる集合$=R^{2n^2}$，$Y=[x\in X;\ \bar{x}^t=x]$ として，ϕ: $X\to Y$ を $\phi(x)=x\bar{x}^t$ により定義する．このとき，(3)と同様，$\phi^{-1}(e)$ は多様体となる．$\phi^{-1}(e)$ は**ユニタリ群**とよばれ，その次元は $2n^2-n^2=n^2$.

注意 (2)，(3)，(4)は**リー群**の例である．すなわちそれらは群であり，しかも空間としては C^ω-多様体で，群の演算は解析的である．

定理 4 の証明 V を Y の元 y_0 のまわりの座標近傍とし，座標関数を $(y_1,\cdots,y_m)$ とする．$x_0\in X_0$ に対して，U を X の元 x_0 のまわりの座標近傍で，$U\subset\phi^{-1}(V)$ とする．$(x_1,\cdots,x_n)$ を U 上の座標関数としよう．この座標関数は $x_i(x_0)=0$ $(1\leq i\leq n)$ とできる．$d\phi$ が x_0 において全射であることから，$m\times n$ 行列 $((\partial/\partial x_j)(y_i\circ\phi)|_{x_0})$ の階数は m である．必要なら U 上の座標関数の番号をつけかえて，この行列の後の m 列が1次独立であるようにできる．すなわち，この行列は

$$\left(*\ \vdots\ J\right)$$

なる形をしている．ここで J は $m\times m$ 正則行列である．$\tilde{\phi}$: $U\to R^{n-m}\times V$ を

$$\tilde{\phi}(x)=(x_1(x),\ \cdots,\ x_{n-m}(x),\ \phi(x))\qquad(x\in U)$$

により定義する．このとき，$d\tilde{\phi}(x_0)$ は

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ * & J\end{pmatrix}.$$

ただし，I は $(n-m)\times(n-m)$ 単位行列である．これより $d\tilde{\phi}(x_0)$ は同型写像である．逆関数の定理より x_0 の近傍 U_0 が存在して，$\tilde{\phi}|_{U_0}$ が単射，$\tilde{\phi}(U_0)$ が $R^{n-m}\times V$ で開，$\tilde{\phi}^{-1}$: $\tilde{\phi}(U_0)\to U_0$ が滑らかであるようにできる．$\tilde{\phi}(U_0)$ は $W_0\times V_0$ $(0\in W_0,\ y_0\in V_0)$ という形をしていると仮定してよい．なぜなら，この形の開集合が $R^{n-m}\times V$ 上の位相の基をなすからである．

ここで $\tilde{\phi}^{-1}(W_0\times\{y_0\})=X_0\cap U$ に注目しよう．$\tilde{\phi}|_{U_0}$ が同相写像であること

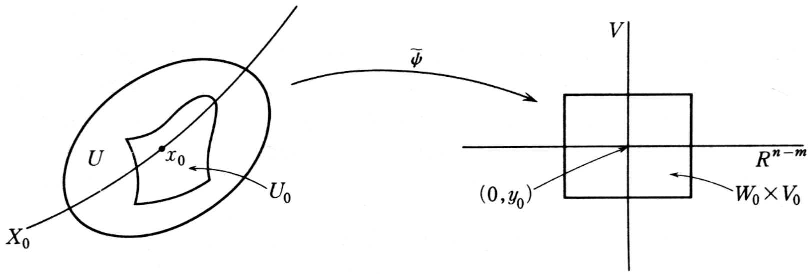


図 5.7

より，$\tilde{\psi}|_{X_0\cap U_0}$ は $X_0\cap U_0$ を $W_0\times\{y_0\}\cong W_0\subset R^{n-m}$ の上に同相に写す．したがって $\tilde{\psi}|_{X_0\cap U_0}$ は X_0 における x_0 のまわりの座標系である．

このようにきめた座標系が実際に X_0 上の滑らかな多様体の構造を定義していることを確かめるために，重なり合った部分の様子を調べよう．そのために

$$\tilde{\psi}:\ U_0\to W_0\times V_0,\qquad \tilde{\varphi}:\ U_1\to W_1\times V_1$$

に対して $(X_0\cap U_0)\cap(X_0\cap U_1)\neq\phi$ であったと仮定する（図 5.8）．$\tilde{\psi}^{-1}$ は滑らかだから $\tilde{\varphi}\circ\tilde{\psi}^{-1}|_{\tilde{\psi}(U_0\cap U_1)}$ も滑らかである．$\tilde{\psi}(X_0\cap U_0\cap U_1)=\tilde{\psi}(U_0\cap U_1)\cap(R^{n-m}\times\{y_0\})$ に制限すれば，

$$\tilde{\varphi}\circ\tilde{\psi}^{-1}|_{\tilde{\psi}(X_0\cap U_0\cap U_1)}:\ \tilde{\psi}(X_0\cap U_0\cap U_1)\to\tilde{\varphi}(X_0\cap U_0\cap U_1)$$

が滑らかである．したがって，X_0 は $n-m$ 次元の滑らかな多様体である．▩

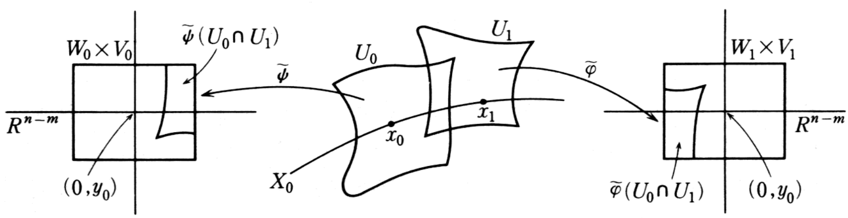


図 5.8

定義 X と Y を滑らかな多様体とし，ψ: $X\to Y$ を滑らかな単射で，かつ，$d\psi$ が X の各点において単射とする．このとき，組 (X, ψ) のことをY の**部分多様体**という．

例 定理 4 における多様体 X_0 と包含写像 $X_0\to X$ との組は，X の部分多様体となる．特に，S^n は R^{n+1} の部分多様体であり，前に議論した各リー群は，$n\times n$ 実行列(ユニタリ群の場合は複素行列)全体からなる空間の部分多様

体である．

注意　ψ: $X\to Y$ が単射であるからといって，$d\psi$ が各点において単射であるとはいえない．たとえば，$\psi(x)=x^3$ により定義された滑らかな写像 ψ: $R^1\to R^1$ は単射であるが，$d\psi(0)=0$ である．また，(X, ψ) が Y の部分多様体であっても，必ずしも ψ が X から $\psi(X)$（相対位相を入れる）の上への同相写像とは“ならない”ことに注意せよ．

例　トーラス

$$S^1\times S^1=[(z_1, z_2);\ z_1, z_2 \text{ は複素数}, |z_1|=|z_2|=1]$$

を考える．ψ: $R^1\to S^1\times S^1$ を $\psi(t)=(e^{2\pi it}, e^{2\pi i\alpha t})$ と定義する．ただし α はある無理数とする．このとき，(R^1, ψ) は $S^1\times S^1$ の部分多様体である．ところが $\psi(R^1)$ は $S^1\times S^1$ において稠密である．これより，ψ は同相写像ではない．この部分多様体はトーラス上の歪直線とよばれる．トーラスを，正方形の互いに向き合う辺を同一視したものとして表わすと，ψ は R^1 を図 5.9 のように写す．

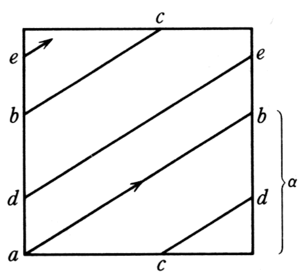


図 5.9

> **定理 5**　(X, ψ) を Y の部分多様体，X をコンパクトとする．X の次元 m，Y の次元 n で $m\leq n$ とする．このとき各 $x_0\in X$ に対して，$\psi(x_0)$ のまわりの座標系 φ_Y: $V\to R^n$ が存在し，座標関数 $(y_1, \cdots, y_n)$ が次の性質
>
> $$\psi(X)\cap V=[y\in V;\ y_{m+1}(y)=\cdots=y_n(y)=0].$$
>
> をもつ．さらに，座標関数 $(x_1, \cdots, x_m)$ をもつ x_0 のまわりの座標系 φ_X: $U\to R^m$ を選んで，$U\subset\psi^{-1}(V)$，かつすべての $j\leq m$ について $x_j=y_j\circ\psi$ となるようにすることができる．したがって，U 上では
>
> $$y_j\circ\psi=\begin{cases} x_j & (j\leq m) \\ 0 & (j>m). \end{cases}$$

証明　定理 5 の証明は問題として残しておこう[1]．

1)［訳注］松島与三著「多様体入門」（裳華房），p. 59，p. 60 参照．

注意　座標系 φ_Y を定理 5 のように選んだとき，$\psi(X)\cap V$ を φ_Y における**スライス**であるという．定理 4 の証明で得られた座標系はこの形である．

> **系**　(X, ψ) が Y の部分多様体で，X がコンパクトであるならば，
> $$\psi:\ X\to\psi(X)$$
> は同相写像で"ある"．また，陰関数の定理を適用して得られる各部分多様体の包含写像は同相写像"である"．

証明　$\psi(X)$ は相対位相でハウスドルフであることより前半が証明される．

定義　X を滑らかな多様体とし，V を X 上の滑らかなベクトル場とする．V の**積分曲線**とは，滑らかな曲線 α: $(a, b)\to X$（図 5.10）で，α の各点における接ベクトルがその点における V の値に等しい，すなわち，すべての $t\in(a, b)$ に対して

$$\dot{\alpha}(t)=V(\alpha(t))$$

となるものをいう．

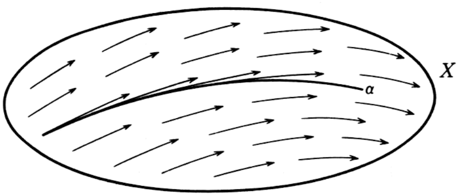


図 5.10

φ: $U\to R^n$ を座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ X 上の局所座標系とする．α: $(a, b)\to U$ を U の中の滑らかな曲線とする．このとき定義より $\dot{\alpha}=d\alpha(d/dt)$．これより，基底 $\{\partial/\partial x_j\}$ に関する $\dot{\alpha}$ の第 i 成分は

$$dx_i(\dot{\alpha})=dx_i(d\alpha(d/dt))=d(x_i\circ\alpha)(d/dt)=d/dt(x_i\circ\alpha).$$

したがって，

$$\dot{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(x_i\circ\alpha)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

このように，α がベクトル場 $V=\sum_{i=1}^{n}a_i(\partial/\partial x_i)$ の積分曲線であるための必要十分条件は

$$(*)\qquad \frac{d}{dt}(x_i\circ\alpha)=a_i\qquad (i\in\{1,\ \cdots,\ n\})$$

である．したがって，与えられたベクトル場 V の積分曲線を座標近傍 U 上で求めるには，微分方程式(*)を解けばよい．解の存在は，次の古典的な定理より保証される．

定理 6 W を R^n の開集合とし，$w_0 \in W$，$a_i \in C^\infty(W, R^1)$ $(1 \leq i \leq n)$ とする．このとき，w_0 のまわりの開集合 $W_0 \subset W$，区間 $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset R^1$，滑らかな写像 ϕ: $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W_0 \to W$ が存在して，各 $w \in W_0$ に対して，$\phi|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times\{w\}}$ が，微分方程式

$$\frac{df_i}{dt} = a_i(f_1(t), \cdots, f_n(t)) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

の初期条件 $f_i(0) = w_i$ を満たす解であるようにできる．すなわち，α_w: $(-\varepsilon, \varepsilon) \to W$ を，

$$\alpha_w(t) = \phi(t, w)$$

とすると，$1 \leq i \leq n$ に対して，

(A) $$\frac{d}{dt}(r_i \circ \alpha_w)(t) = a_i(r_1 \circ \alpha_w(t), r_2 \circ \alpha_w(t), \cdots, r_n \circ \alpha_w(t))$$

(すべての $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して)

かつ

(B) $$(r_i \circ \alpha_w)(0) = r_i(w) \qquad (1 \leq i \leq n).$$

さらに，α_w は(A)と(B)を満たす一意的な関数 α_w: $(-\varepsilon, \varepsilon) \to W$ である．

定理 6 をベクトル場の観点から解釈し直すと，次の定理 7 が得られる．

定理 7 X を滑らかな多様体とし，V を X 上の滑らかなベクトル場とする．$x_0 \in X$ をとる．このとき，x_0 のまわりの開集合 U，区間 $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset R^1$，滑らかな写像 ϕ: $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to X$ が存在し，各 $u \in U$ に対して，$\alpha_u(t) = \phi(t, u)$ で定義された曲線

$$\alpha_u: (-\varepsilon, \varepsilon) \to X, \qquad \alpha_u(0) = u$$

が，V の一意的な積分曲線: $(-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ であるようにできる．

さらに，各 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して，$\phi_t(u) = \phi(t, u)$ で定義された滑らかな写像 ϕ_t: $U \to X$ は次の性質をもつ．

(1) $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ のとき，${\phi_{t_2}}^{-1}(U)$ 上で $\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}$，

(2) 各 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して，$\phi_t(U) \cap U$ 上で $\phi_{-t} = {\phi_t}^{-1}$．

証明 W を座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ，x_0 のまわりの座標近傍とする．

このとき W 上では，ある滑らかな関数

$$a_i \in C^\infty(W, R^1)$$

に対して，$V=\sum_{i=1}^{n} a_i(\partial/\partial x_i)$ である．定理6より $U\subset W$，$(-\varepsilon, \varepsilon)\subset R^1$，$\phi$: $(-\varepsilon, \varepsilon)\times U\to W\subset X$ が存在して，それらは求める条件を満たす．最後の部分は解の一意性よりいえる．すなわち，$t_1\to\phi(t_1+t_2, u)$ と $t_1\to\phi(t, \phi_{t_2}(u))$ はともに 0 を $\phi_{t_2}(u)$ に写す V の積分曲線である．これより両者は等しく，$\phi_{t_1+t_2}=\phi_{t_1}\circ\phi_{t_2}$．同様に，$\phi_{-t}=\phi_t{}^{-1}$． ▓

定理7の性質(1)，(2)は，ϕ が**局所1-パラメータ変換群**であることを示している．

定理7は，ベクトル場に対して，積分曲線が局所的に存在することを保証している．しかしながら，積分曲線が常に大域的に与えられるとは限らない．すなわち，x_0 を通り，与えられたベクトル場 V の積分曲線となるような曲線 α: $R^1\to X$ を見つけることは一般には不可能である．たとえば，$X=R^2-\{0\}$，$V=\partial/\partial r_1$ とする．このとき，$(-1, 0)$ を通る V の積分曲線は $t\geq 1$ には拡張できない(図5.11)．しかし，X がコンパクトであれば，あらゆるベクトル場は各点を通る R^1 全体で定義された積分曲線をもつ[1)]．

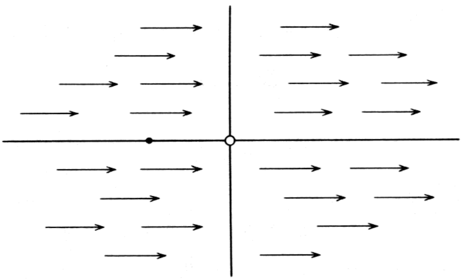


図 5.11

注意 1 力の場 F に支配された R^3 の質点の運動について調べてみると，ニュートンの法則より，運動の軌道は

$$m\frac{d^2x_i(t)}{dt^2}=F_i \qquad (1\leq i\leq 3,\ m\text{ は質点の質量})$$

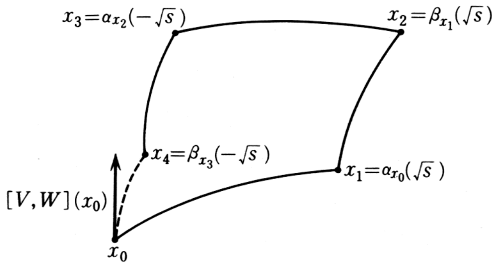
を満たす曲線 $(x_i(t))$ であることがわかる．$p_i=m(dx_i/dt)$ とおけば，

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{p_i}{m}, \qquad \frac{dp_i}{dt}=F_i \quad (1\leq i\leq 3).$$

1) ［訳注］ 松島与三著「多様体入門」(裳華房)，p. 77 参照．他にミルナー著(志賀浩二訳)「モース理論」(吉岡書店)，p. 12 参照．

ところで $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ は，R^3 の余接ベクトル束の座標と考えることができる．したがって，余接ベクトル束におけるベクトル場の積分曲線を R^3 に射影したものが，ちょうど質点の軌跡になっている．実際，多様体上の力学を研究する際には余接ベクトル束を考えることはごく自然である．

注意 2 積分曲線を用いて，2つのベクトル場のブラケットについて，幾何学的解釈を与えよう．V と W を X 上の滑らかなベクトル場とする．$x_0 \in X$ をとり，パラメータを 0 から $\sqrt{s}$ まで動かして，x_0 を通る V の積分曲線上を移動する．次に，W の積分曲線に沿って 0 から $\sqrt{s}$ まで移動し，さらに，V の積分曲線に沿って戻る（このときのパラメータは 0 から $-\sqrt{s}$ まで）．最後に W の積分曲線に沿って 0 から $-\sqrt{s}$ まで戻る．以上の運動は図 5.12 に示してある．一般には出発点に戻らず，$s \to 0$ につれて，終点は x_0 を通る曲線を描く．ブラケット $[V, W](x_0)$ は，この曲線の x_0 における接ベクトルを表わす．



α_x＝(x を通る V の積分曲線)，β_x＝(x を通る W の積分曲線)

図 5.12

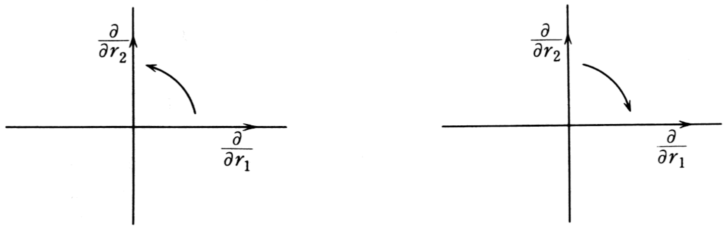
定義 V を n 次元実ベクトル空間とする．このとき $\Lambda^n(V^*)$ は 1 次元であるので R^1 に同型である．したがって $\Lambda^n(V^*) - \{0\}$ は連結ではなく，2つの連結成分の和集合である．V の**向き**とは，これらの連結成分の 1 つを選択することである．**向きづけられたベクトル空間**とは，$\mathcal{A}$ を V の 1 つの向きとしたときの対 $(V, \mathcal{A})$ のことである．

注意 このように，ベクトル空間 V は 2 通りの向きをとりうる．V^* の順序づけられた基底 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ は V の 1 つの向き，すなわち $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ が属する $\Lambda^n(V^*)$ の連結成分をきめる．V^* の順序づけられた基底 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ と $\{\varphi_1', \cdots, \varphi_n'\}$ が与えられ，$\varphi_i' = \sum c_{ji}\varphi_j$ であるならば，$\varphi_1' \wedge \cdots \wedge \varphi_n' = \det(c_{ij})\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ である．したがって，順序づけられた 2 つの基底が同じ向きをきめるための必要十分条件は，基底変換行列の行列式が正であることである．特に $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ が V^* の順序づけられた基底ならば，基底

$$\{\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3, \cdots, \varphi_n\}$$

によりきめられた向きは，$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ によりきめられた向きとは異なっている．

R^2 においては，向きをきめることは回転をきめることと同じである．$\{dr_1, dr_2\}$ によってきめられた向きは，R^2 上に普通の意味での正の向き(反時計回り)の回転をきめる．すなわち，$\partial/\partial r_1$ を $\partial/\partial r_2$ に写す回転が $+(\pi/2)$ の回転である．一方，$\{dr_2, dr_1\}$ によってきめられた向きでは，$\partial/\partial r_2 \to \partial/\partial r_1$ が $+(\pi/2)$ の回転であり，普通の意味とは逆の向きの回転をきめている(図 5.13)．同様に，R^3 の向きをきめることは，ベクトル積をきめるときに右手系でとるか左手系でとるかということと同じである．



$dr_1 \wedge dr_2$ による向き　　$dr_2 \wedge dr_1$ による向き

図 5.13

定義　滑らかな多様体 (X, Φ) が**向きづけ可能**であるとは，部分集合 $\Phi' \subset \Phi$ が存在して，次の(1), (2)を満たすことである．

（1） $\{\mathrm{domain}\,\varphi\}_{\varphi \in \Phi'}$ は X の被覆，

（2） Φ' に属する座標系 φ_1 と φ_2 が，それぞれ定義域 U と V，座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$ と $(y_1, \cdots, y_n)$ をもつならば，

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \lambda dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

できめられる関数 $\lambda\colon U \cap V \to R^1$ は至るところで正である．

向きづけ可能な多様体 (X, Φ) の**向き**とは，(1)と(2)を満たし，かつ(2)に関して極大であるような部分集合 $\Phi' \subset \Phi$ を選ぶことである．**向きづけられた多様体**とは，(X, Φ) を向きづけ可能な多様体，Φ' を (X, Φ) の 1 つの向きとしたとき，X, Φ, Φ' の 3 つからなる組 (X, Φ, Φ') のことである．

注意　$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \lambda dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ できめられた関数 λ は，まさに $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ のヤコビ行列式である．すなわち

$$\lambda = \det\left(\frac{\partial}{\partial y_j}(x_i)\right) = \det d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}).$$

このことから，連結で向きづけ可能な多様体 (X, Φ) は，ちょうど 2 つの向き Φ' と Φ'' をもち，Φ は交わりのない和 $\Phi' \cup \Phi''$ であることが容易にわかる．

多様体の向きについては，n 次の微分形式の概念を用いて以下のように考えてもよい．まず集合 $\Lambda^n(X)$ を考え，これに $(n+1)$ 次元多様体の構造を次のように与える．$\varphi\colon U \to R^n$ を座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ X 上の局所座標

系とする．このとき，$\pi^{-1}(U)$ 上の座標系 $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U)\to R^{n+1}$ が

$$\tilde{\varphi}(\omega)=(\varphi(\pi(\omega)),\ \lambda(\omega)) \qquad (\omega\in\pi^{-1}(U))$$

により定義される．ただし $\lambda: \pi^{-1}(U)\to R^1$ は

$$\lambda(\omega)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=\omega \qquad (\omega\in\pi^{-1}(U))$$

によりきめられた関数である．$\Lambda^n(X)$ を用いて，向きづけ可能性を特徴づけてみよう．

定理 8　X を連結で滑らかな多様体とする(図 5.14).

$$O=\bigcup_{x\in X}\{\Lambda^n(T^*(X,x)) \text{ における } 0 \text{ 元}\}\subset\Lambda^n(X)$$

とする．このとき，$\Lambda^n(X)-O$ は連結であるか，あるいは，ちょうど2つの連結成分に分かれるかのどちらかであり，前者の場合，X は向きづけ可能ではなく，後者の場合 X は向きづけ可能で“ある”．向きづけ可能な多様体の向きは，これら2つの連結成分の1つを選ぶことと同じである．

証明　証明は省略する．

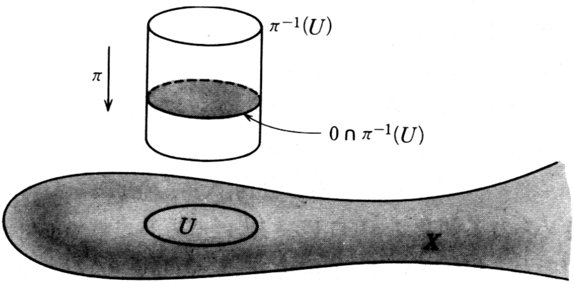


図 5.14

定理 9　(X,Φ) を n 次元の滑らかな多様体とする．至るところで0でない X 上の滑らかな n-形式 ω が存在すれば，X は向きづけ可能である．

証明　連結な定義域 U と座標関数 $(x_1,\cdots,x_n)$ をもつ X 上の局所座標系を $\varphi\in\Phi$ とする．このとき U 上で，ある滑らかな関数 $f_\varphi: U\to R^1$ に対して

$$\omega=f_\varphi dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

ω は決して0とはならないから，f_φ も0とはならない．したがって，至るところで $f_\varphi>0$ か，あるいは至るところで $f_\varphi<0$ かのいずれかである．

$$\Phi'=[\varphi\in\Phi;\ f_\varphi>0]$$

とおく．このとき Φ' は X の向きである．まず Φ' は条件(1)を満たす．すなわ

ち，ある $x \in X$ に対して，φ が $f_\varphi<0$ である x のまわりの座標系だとしても，x のまわりの新しい座標系 $\tilde{\varphi}$ (φ の座標関数のうちの 1 つの符号をかえて得られるもの) をとれば，$f_{\tilde{\varphi}}>0$ である．次に(2)を示そう．$\varphi, \psi \in \Phi'$ が，それぞれ定義域 U, V, 座標関数 $(x_1, \cdots, x_n)$, $(y_1, \cdots, y_n)$ をもてば，$U \cap V$ 上では

$$dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = \frac{1}{f_\psi}\omega = \frac{f_\varphi}{f_\psi} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \qquad \text{かつ} \qquad \frac{f_\varphi}{f_\psi}>0.$$

極大性は明らかである．▓

定理 10 (X, ψ) を R^{n+1} の n 次元部分多様体とする．(X, ψ) が 0 でない「法ベクトル場」V をもつとする．すなわち，滑らかな写像 $V: X \to T(R^{n+1})$ で，各 $x \in X$ に対して，$V(x)$ が $T(R^{n+1}, \psi(x))$ の 0 でないベクトルで $d\psi(T(X, x))$ に直交するもの，をもつとする(図 5.15)．このとき，X は向きづけ可能である．

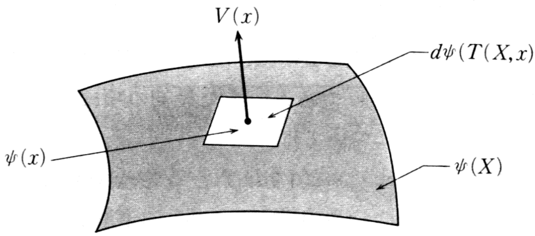


図 5.15

注意 $T(R^{n+1}, \psi(x))$ における直交性は，

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r_i}, \frac{\partial}{\partial r_j} \right\rangle = \delta_{ij}$$

により与えられた内積 〈 , 〉 に関するものである．

定理 10 の証明 法ベクトル場 V が与えられたとき，$\psi(X)$ の点において

$$\mu = i(V) dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_{n+1}$$

で定義された n-形式 μ を考える[1]．$\omega = \psi^* \mu$ とおく．このとき ω は X 上の滑らかな n-形式である．定理 9 より，ω が X 上で決して 0 にならないことを示

1) [訳注] ここで μ は 5.2 節の定理 3 (ポアンカレの補題)の注意 1 で与えた内部積 i を用いて次のように定義したものである．すなわち $T(R^{n+1}, \psi(x))$ を T と考えると，$V(x) \in T$ より

$$i(V(x)): \Lambda^{n+1}(T^*) \to \Lambda^n(T^*)$$

である．これにより $i(V)$ を定義すると，$i(V)(\nu)$ は R^{n+1} 上の n-形式．ここで $\nu = dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_{n+1}$.

せばよい．そうでないと仮定する．すなわち，ある $x\in X$ に対して $\omega(x)=0$ であったとする．このとき，すべての $v_1, \cdots, v_n\in T(X, x)$ に対して，

$$\begin{aligned}0&=\omega(x)(v_1, \cdots, v_n)\\&=\phi^*\mu(x)(v_1, \cdots, v_n)\\&=\mu(\phi(x))(d\phi(v_1), \cdots, d\phi(v_n)).\end{aligned}$$

一方，各ベクトル $w\in T(R^{n+1}, \phi(x))$ は，ある $v\in T(X, x)$ に対して，$w=d\phi(v)+cV(x)$ $(c\in R^1)$ という形である．したがって，勝手なベクトル

$$w_i=d\phi(v_i)+c_iV(x)\in T(R^{n+1}, \phi(x))\qquad(1\leq i\leq n)$$

に対して，

$$\begin{aligned}&\mu(\phi(x))(w_1, \cdots, w_n)\\&=\mu(\phi(x))(d\phi(v_1)+c_1V(x), \cdots, d\phi(v_n)+c_nV(x))\\&=\mu(\phi(x))(d\phi(v_1), \cdots, d\phi(v_n))\\&\quad+\sum_{j=1}^{n}c_j\mu(\phi(x))(d\phi(v_1), \cdots, d\phi(v_{j-1}), V(x), d\phi(v_{j+1}), \cdots, d\phi(v_n)).\end{aligned}$$

上の式で他のすべての項が0になるのは，$V(x)$ が変数として2度現われることと μ が歪対称であることからである．また最初の項は，すでに述べたように0となるし，後の和の各項については，

$$\begin{aligned}\mu(\phi(x))(\cdots, V, \cdots)&=i(V)dr_1\wedge\cdots\wedge dr_{n+1}(\cdots, V, \cdots)\\&=dr_1\wedge\cdots\wedge dr_{n+1}(V, \cdots, V, \cdots)\\&=0.\end{aligned}$$

$w_1, \cdots, w_n\in T(R^{n+1}, \phi(x))$ は勝手なベクトルであるから，$\mu(\phi(x))=0$ がいえた．ところで，

$$\begin{aligned}\mu&=i(V)dr_1\wedge\cdots\wedge dr_{n+1}\\&=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}(Vr_j)dr_1\wedge\cdots\wedge dr_{j-1}\wedge dr_{j+1}\wedge\cdots\wedge dr_{n+1}.\end{aligned}$$

ある j に対して，$V(x)r_j\neq0$ であるから，$\mu(\phi(x))\neq0$．これは矛盾である．したがって定理が証明された．▒

系　単位球面 S^n は向きづけ可能である．

証明　S^n は0でない法ベクトル場，すなわち，$R^{n+1}-\{0\}$ 上の原点から外側に向かう単位ベクトル場を S^n に制限したものをもつ．▒

注意 1　R^{n+1} のすべてのコンパクトで連結な n 次元部分多様体は，R^{n+1} を2つの連結な部分(1つは有界，もう1つは有界でない)に分けることが示せる．したがって，そ

のような部分多様体は単位法ベクトル場(たとえば，有界でない連結成分の方へ向かう)をもち，向きづけ可能である.

注意 2 向きづけ可能でない2次元多様体は単側曲面とよばれる.

例 1 上下のふちを含まない長方形の帯を，半回転ねじって端を貼り合わせて得られる「メービウスの帯」Sは向きづけ可能ではない. 0でない法ベクトル場がS上には存在しない. なぜなら，そのような法ベクトル場があったとして，それを中心線に沿って連続的に変化させると，1周した点において反対方向を向いてしまうからである.

例 2 「クラインの壺」Kは，$I \times I$から，まず一方の向き合う辺を同一視(貼り合わせること)して円筒をつくり，次に円筒をねじって，残りの辺を図5.16のように同一視したものである. Kは向きづけ可能ではない. この曲面は

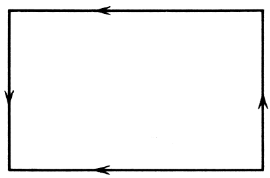


図 5.16

R^3の部分多様体として表わすことはできない. しかし，写像ϕ: $K \to R^3$が存在して，$d\phi$が各点で単射であり，R^3内の1つの円周に沿った点を除くと，ϕは1対1であるようにできる(図5.17参照).

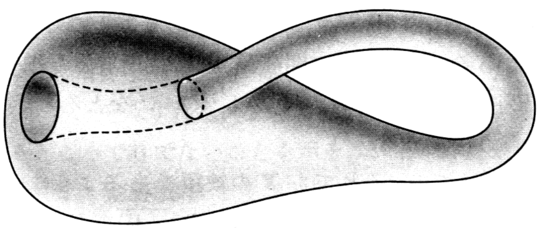


図 5.17

定義 Xを位相空間とし，$\mathcal{U}$をXの開被覆とする. 被覆$\mathcal{U}$が**局所有限**であるとは，各$x \in X$に対して，xを含む開集合W_xで，

$$[U \in \mathcal{U};\ U \cap W_x \neq \phi]$$

が有限集合であるものが存在することをいう.

定義　位相空間 X が**パラコンパクト**であるとは，X のあらゆる開被覆が局所有限な細分をもつことである．すなわち，X のあらゆる開被覆 $\mathcal{U}$ に対して局所有限な開被覆 $\mathcal{V}$ が存在して，$V\in\mathcal{V}$ ならば ある $U\in\mathcal{U}$ に対して $V\subset U$ となるようにできることである．

注意　すべての距離空間はパラコンパクトであることがいえる．また，正則位相空間が可算基をもてばパラコンパクトである．

定義　X を滑らかな多様体とする．X 上の滑らかな**1の分割**とは，X の局所有限な被覆 $\mathcal{V}$ と，次の条件を満たす X 上の滑らかな実数値関数の集まり $\mathcal{F}=\{f_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ との組 $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ のことである．

（1）　各 $f_V\geq 0$,

（2）　各 $V\in\mathcal{V}$ に対して，(f_V の台)＝(集合 $[x\in X;\ f_V(x)\neq 0]$ の閉包) は V に含まれる，

（3）　$\sum_{V\in\mathcal{V}} f_V=1$　((3)の和が意味をもつのは，各 $x\in X$ に対して，有限個の $V\in\mathcal{V}$ を除き $f_V(x)=0$ であるから)．

定理 11　X をパラコンパクトな多様体とする．このとき，X の任意の被覆 $\mathcal{U}$ に対して，X 上の滑らかな1の分割 $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ で，$\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の細分であるものが存在する．

証明　まず，X が多様体であることより，$\mathcal{U}$ の細分 $\mathcal{W}$ が存在して，各開集合 $W\in\mathcal{W}$ が座標近傍で，$\overline{W}$ がコンパクトであるようにできる．次に X がパラコンパクトであることより，開被覆 $\mathcal{W}$ の局所有限な細分 $\mathcal{V}$ が存在する．$\mathcal{V}$ はまた $\mathcal{U}$ の細分でもあり，しかも $V\in\mathcal{V}$ をとると，$\bar{V}$ はコンパクト，かつ V は座標近傍である．

「被覆 $\mathcal{V}$ を少し縮めて」，それでも X の被覆であるようにできると仮定する．これは，各 $V\in\mathcal{V}$ に対して，開集合 $\alpha(V)$ を $\overline{\alpha(V)}\subset V$ で，$\{\alpha(V)\}_{V\in\mathcal{V}}$ が X の被覆であるようにとれるという意味である．$V\in\mathcal{V}$ が座標近傍で，$\overline{\alpha(V)}$ が V 内のコンパクト集合であるから，滑らかな非負関数 $g_V\colon X\to R^1$ で，$x\in\alpha(V)$ に対しては $g_V(x)=1$ [1)]，$x\notin V$ に対しては $g_V(x)=0$ であるものが存

1)［訳注］ $g_V(x)>0$ $(x\in\alpha(V))$ でよい．g_V は5.1節の問題2を用いてつくれる．村上信吾著「多様体」(共立出版)，p. 17 の補題3，および p. 19 の定理2参照．ほかに，松島与三著「多様体入門」(裳華房)，p. 83 参照．

在する．ここで $g=\sum_{V\in\mathcal{V}} g_V$ とおく．$\mathcal{V}$ が局所有限であるから，g は定義可能であり，$C^\infty(X, R^1)$ の元である．さらに，$\{\alpha(V)\}_{V\in\mathcal{V}}$ が X の被覆であることより g は X 上で決して 0 にはならない．したがって，$f_V=g_V/g\in C^\infty(X, R^1)$．$\mathcal{F}=\{f_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ とおくと，$(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ は滑らかな 1 の分割である．

「被覆 $\mathcal{V}$ を少し縮める」ためには，次のようにすればよい．下の(1)～(3)を満たす写像 β 全体からなる族 $\mathcal{B}$ を考える．

（1）　β の定義域は $\mathcal{V}$ の部分集合 $\mathcal{D}_\beta$．

（2）　$V\in\mathcal{D}_\beta$ ならば $\beta(V)$ は V に含まれる開集合で，$\overline{\beta(V)}\subset V$．

（3）　開集合の集まり $[\beta(V);\ V\in\mathcal{D}_\beta]\cup[V;\ V\notin\mathcal{D}_\beta]$ は X の開被覆．

族 $\mathcal{B}$ は半順序づけされる．$\beta<\gamma$ とは，$\mathcal{D}_\beta\subset\mathcal{D}_\gamma$ かつ $V\in\mathcal{D}_\beta\Longrightarrow\beta(V)=\gamma(V)$ であると定義する．次の点集合に関する議論は読者に任せよう．$\mathcal{V}$ が局所有限であることから，最大値原理を用いて，$\mathcal{B}$ が極大元 α をもち，$\mathcal{D}_\alpha=\mathcal{V}$ であることがいえる．この α が求める縮め方である．▮

定理 12　X を向きづけ可能なパラコンパクト多様体とする．このとき，X 上の滑らかな n–形式 ω で，決して 0 にならないものが存在する．

証明　Φ' を 1 つの向きとする．$\mathcal{U}=\{\mathrm{domain}\,\varphi\}_{\varphi\in\Phi'}$ とおく．$\mathcal{U}$ は X の開被覆である．$(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ を滑らかな 1 の分割とし，$\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の細分であるとする．各 $V\in\mathcal{V}$ に対して，$\varphi_{V\in\Phi'}$ を $V\subset\mathrm{domain}\,\varphi_V$ であるようにとる．このとき φ_V の V への制限もまた Φ' の元である．$(x_1{}^V, \cdots, x_n{}^V)$ を V 上の座標関数とする．このとき n–形式 $\omega^V=dx_1{}^V\wedge\cdots\wedge dx_n{}^V\in C^\infty(V, \Lambda^n(V))$ は，V 上の至るところで 0 でない．$\omega=\sum_{V\in\mathcal{V}} f_V\,\omega^V$ とおく．ここで，$f_V\,\omega^V$ は定義より V の外側では 0 である．そうすれば，$\omega\in C^\infty(X, \Lambda^n(X))$．

次に ω が至るところで 0 でないことを示そう．$x\in X$ に対して，$\varphi\in\Phi'$ を x のまわりの座標系で，定義域 U と座標関数 $(y_1, \cdots, y_n)$ をもつものとする．このとき $U\cap V\neq\phi$ なる各 $V\in\mathcal{V}$ に対して，

$$\omega^V=dx_1{}^V\wedge\cdots\wedge dx_n{}^V=g_V dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n \qquad (U\cap V\text{ 上で})$$

であり，しかも $U\cap V$ 上で $g_V>0$（なぜなら φ_V と φ は Φ' の元であるから）である．したがって，

$$\omega|_U=\sum_{V\in\mathcal{V}}(f_V\omega^V)|_U=\left(\sum_{V\in\mathcal{V}} f_V g_V\right)dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n.$$

$\sum_{V\in\mathcal{V}} f_V=1$ より，$f_{V0}(x)>0$ となる $V_0\in\mathcal{V}$ が存在する．$g_{V_0}(x)\neq0$ と各 $f_V g_V\geq$

0 とから $\left(\sum_{V\in\mathcal{V}} f_V g_V\right)(x)\neq 0$. したがって $\omega(x)\neq 0$. ▒

注意　定理 9 と定理 12 は, パラコンパクト多様体の向きづけ可能性を, 0 でない n-形式が存在するかしないかで, 完全に特徴づけている. この特徴づけを適用して,「射影空間 P^n が向きづけ可能であるための必要十分条件は, n が奇数であることである」ということが次のように示される. まず, P^n の被覆空間として S^n を考え, 被覆写像を p とする. ω を S^n 上の 0 でない n-形式(定理 10 とその系において構成したもの)とする. "奇数" n に対しては, ω から P^n 上の n-形式 $\tilde{\omega}$ が $\omega=p^*\tilde{\omega}$ を満たすようにつくれる. したがって, P^n 上に 0 でない n-形式 $\tilde{\omega}$ が存在するので P^n は向きづけ可能である. 次に逆を示す. n が "偶数" のとき, P^n が向きづけ可能であると仮定する. このとき, P^n 上に 0 でない n-形式 $\tilde{\omega}$ が存在し, しかも至るところで 0 でない g をとって $p^*\tilde{\omega}=g\omega$ とできる. 一方, $x_1\neq x_2\in S^n$ で, $p(x_1)=p(x_2)$ である 2 つの点をとると, $g(x_1)>0 \Leftrightarrow g(x_2)<0$ がいえて, 至るところで $g\neq 0$ に矛盾する.

注意　滑らかな n 次元多様体上の滑らかな 0 でない n-形式は**体積要素**とよばれる. 定理 12 より, 向きづけ可能なパラコンパクト多様体は体積要素をもつ. 定理 10 とその系で議論した S^n 上の形式 $i(V)dr_1\wedge\cdots\wedge dr_{n+1}$ は, n 次元球面上の普通の体積要素である.

定義　**リーマン多様体**とは, 滑らかな多様体 X で, 写像

$$\langle\ ,\ \rangle : X\to \bigcup_{x\in X}\{T(X,x)\text{ における内積全体}\}.$$

をもつものである. ここで, 各 $x\in X$ に対して $\langle\ ,\ \rangle(x)$ (普通は $\langle\ ,\ \rangle_x$ と書く) は, $T(X,x)$ における内積で, しかも写像 $\langle\ ,\ \rangle$ は滑らかとする. すなわち, X 上の滑らかなベクトル場の各組 V_1, V_2 に対して, $\langle V_1, V_2\rangle$ は X 上の滑らかな関数である. ただし

$$\langle V_1, V_2\rangle(x)=\langle V_1(x), V_2(x)\rangle_x.$$

写像 $\langle\ ,\ \rangle$ を X 上の**リーマン構造**(あるいは, **リーマン計量**)という.

定理 13　X を滑らかなパラコンパクト多様体とする. このとき, X 上にリーマン構造が存在する.

証明　$(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ を X 上の滑らかな 1 の分割で, 各 $V\in\mathcal{V}$ が座標近傍であるものとする. 各 $V\in\mathcal{V}$ 上でリーマン構造 $\langle\ ,\ \rangle_V$ を

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle_V=\delta_{ij}$$

により定義する. ただし $(x_1, \cdots, x_n)$ は V 上の座標関数である. これを用いて, X 上の $\langle\ ,\ \rangle$ を $\langle\ ,\ \rangle=\sum_{V\in\mathcal{V}} f_V\langle\ ,\ \rangle_V$ とすればよい. ▒

注意　定理 13 の逆も成り立つ. すなわち, すべてのリーマン多様体はパラコンパクト

である．

例 1 R^n はリーマン多様体である．各点における接空間の正規直交基底として，$\{\partial/\partial r_i\}$ をとれ．

例 2 X をリーマン多様体，(Y, i) を X の部分多様体とする．このとき，

$$\langle v_1, v_2\rangle_y=\langle di(v_1), di(v_2)\rangle_{i(y)} \qquad (v_1, v_2 \in T(Y, y))$$

により Y 上にリーマン構造が与えられる．

例 3 例2より，R^n のすべての部分多様体はリーマン構造をもつ．

例 4 X と Y をリーマン多様体とする．このとき，多様体 $X\times Y$ は次のように与えられるリーマン構造をもつ．まず，$(x, y)\in X\times Y$ に対して，接空間 $T(X\times Y, (x, y))$ と，ベクトル空間 $T(X, x)$, $T(Y, y)$ の直和との間に，自然な同型写像があることに注意する．$T(X\times Y, (x, y))$ における内積が，「直交する直和 $T(X, x)\oplus T(Y, y)$ に関して，上の自然な同型写像が等長である」という条件を満たすように与えられる[1]．

定義 X と Y をリーマン多様体とする．写像 φ: $X\to Y$ が**等長写像**であるとは，φ が滑らかな全単射で，滑らかな逆写像をもち，しかも $d\varphi$ が各点において等長写像，すなわち，すべての $v_1, v_2\in T(X, x)$, すべての $x\in X$ に対して

$$\langle d\varphi(v_1), d\varphi(v_2)\rangle_{\varphi(x)}=\langle v_1, v_2\rangle_x$$

であることである．

注意 等長写像はリーマン多様体の構造をすべて保存する．リーマン幾何学の立場では，2つの多様体が同値であるとは，それらの間に等長写像が存在することとしており，同値な2つの多様体は**等長**であるといわれる．2つのリーマン多様体が，リーマン多様体として(リーマン幾何学の立場で)異なっていても，滑らかな多様体としては同じであることもありうる．

例 5 トーラス $S^1\times S^1$ を考える．これは R^3 の部分多様体としてのリーマン構造をもつ(図5.18)．一方，積 $S^1\times S^1$ としてのリーマン構造ももつ．ただし，S^1 には R^2 に普通に埋めこまれた部分多様体としてのリーマン構造が与えられているとする．これら2つの構造は異なっている．実際，$S^1\times S^1$ の積構造は，$S^1\times S^1$ を R^3 の部分多様体として表わすことによっては得られない(第8章を参照せよ)．しかしながら

1) ［訳注］ 具体的には，$u_1, u_2\in T(X\times Y, (x, y))$ に対して，それぞれ v_1+w_1, $v_2+w_2\in T(X, x)\oplus T(Y, y)$ を対応させ，$\langle u_1, u_2\rangle_{(x,y)}=\langle v_1, v_2\rangle_x+\langle w_1, w_2\rangle_y$ により $T(X\times Y, (x, y))$ における内積を定義すればよい．

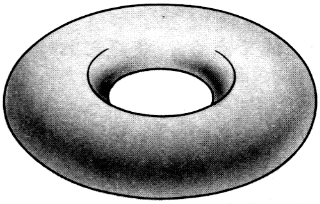


図 5.18

$$S^1 \times S^1 \subset R^2 \times R^2 = R^4$$

であるから，この積構造は R^4 の部分多様体として表わすことにより得られる．

6章　ホモロジー理論とド・ラム理論

6.1　単体的ホモロジー

滑らかな多様体 X に対するド・ラム コホモロジー群 $H^l(X, d)$ はすでに定義されている．この群は，次の写像

$$C^\infty(X, \Lambda^{l-1}(X)) \xrightarrow{d} C^\infty(X, \Lambda^l(X)) \xrightarrow{d} C^\infty(X, \Lambda^{l+1}(X))$$

から導かれ，$H^l(X, d) = \mathrm{Ker}\, d/\mathrm{Im}\, d$ であった．そして，$H^0(X, d)$ の次元によって X の連結成分の数が測られること，また少なくとも X が円周 S^1 の場合には，$H^1(X, d)$ の次元によって X の「穴」の数が測られることがわかった．ここでは，単体的複体 X に対して同様な群を構成する．次のような写像

$$C_{l-1} \xleftarrow{\partial} C_l \xleftarrow{\partial} C_{l+1}$$

を考える．ここで C_k はアーベル群で，$\partial^2 = 0$ である．このとき，ホモロジー群 H_l が $H_l = Z_l/B_l$ で定義される．ただし，$Z_l = \mathrm{Ker}(\partial\colon C_l \to C_{l-1})$，$B_l = \mathrm{Im}(\partial\colon C_{l+1} \to C_l)$ である．Z_l の元は幾何学的には境界をもたない l-単体の「鎖」である．B_l の元は $(l+1)$ 単体の鎖の境界である．1-単体 (v_0, v_1) の境界は適当に符号をつけた 0-単体 v_0 と v_1 の和である．同様に 2-単体 (v_0, v_1, v_2) の境界は，辺 (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_0) の適当な 1 次結合である．

定義　$v_0, v_1, \cdots, v_l$ を頂点にもつ l-単体を s とする．s の頂点の 2 つの順序づけ $(v_{j_0}, v_{j_1}, \cdots, v_{j_l})$ と $(v_{k_0}, v_{k_1}, \cdots, v_{k_l})$ が**同値**であるとは，$(k_0, \cdots, k_l)$ が $(j_0, \cdots, j_l)$ の偶置換になっていることをいう．これは，明らかに同値関係である．$l>0$ なら，この同値関係は $v_0, \cdots, v_l$ の順序づけを 2 つの同値類に分ける．**向きのついた単体**とは，この同値類のどちらか 1 つを選んだ単体 s のことである．$v_0, v_1, \cdots, v_l$ が s の頂点であるとき，順序 $(v_0, \cdots, v_l)$ によってき

まる向きのついた単体を $\langle v_0, v_1, \cdots, v_l\rangle$ によって表わす．

注意　向きのついた1-単体は，1-単体に方向をつけたものと考えられる．向きのついた2-単体は，2-単体に回転方向をつけたものと考えられる(図6.1を見よ)．高次元でも同様である．実際，任意の l-単体 s は，ある $\boldsymbol{R}^m$ の中の l 次元平面に含まれる．s に向きをつけた $\langle v_0, v_1, \cdots, v_l\rangle$ を考えるということは，順序のついた基 $\{v_1-v_0, v_2-v_0, \cdots, v_l-v_0\}$ によって s を含む l 次元平面に向きをつけることと同じである．

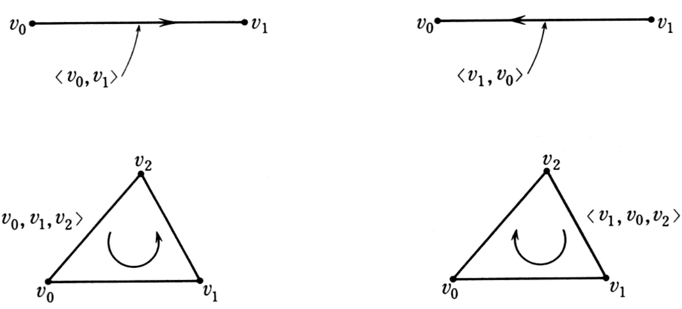


図 6.1

定義　K を単体的複体とし，$\mathcal{J}$ を整数のつくる群とする．K のすべての向きづけられた l-単体で生成される自由アーベル群を，$\langle v_0, v_1, v_2, \cdots, v_l\rangle+\langle v_1, v_0, v_2, \cdots, v_l\rangle$ の形をした元全体で生成される部分群によって割った商群を，$C_l(K, \mathcal{J})$ と表わす．このとき，$C_l(K, \mathcal{J})$ は K の整係数 **l-鎖群**とよばれる．この群の任意の元(すなわち l-鎖)は

$$\sum_{s:\, l\text{-単体}} n_s\langle s\rangle \qquad (n_s\in\mathcal{J})$$

の形をしている．ここで，各 l-単体 s に対して $\langle s\rangle$ はあるきまった向きをつけたものであり，その反対の向きをつけたものと $-\langle s\rangle$ を同一視する．

注意　任意に与えられた群 $\mathcal{G}$ に対して，係数を $\mathcal{G}$ にもつ K の l-鎖群 $C_l(K, \mathcal{G})$ を，形式的1次結合

$$\sum_s g_s\langle s\rangle \qquad (g_s\in\mathcal{G})$$

全体の集まりで，$-g_s\langle v_0, v_1, \cdots, v_l\rangle=g_s\langle v_1, v_0, \cdots, v_l\rangle$ と同一視されているものと定義することができる($\mathcal{G}$ の群の演算は加法的に書いている)．特に，任意の体 $\mathcal{F}$ に対して $C_l(K, \mathcal{F})$ が定義される．この場合，$C_l(K, \mathcal{F})$ は次元が K の l-単体の数と等しい $\mathcal{F}$ 上のベクトル空間になる．本書では，$\mathcal{G}$ が，整数 $\mathcal{J}$，実数 $\boldsymbol{R}$，複素数 $\boldsymbol{C}$，あるいは2を法とした整数の剰余類，すなわち位数2の群の場合だけを扱う．

定義 $\langle s\rangle=\langle v_0, v_1, \cdots, v_{l+1}\rangle$ を向きのついた $(l+1)$-単体とする．$\langle s\rangle$ の**境界** $\partial\langle s\rangle$ とは，次の式によって定義される l-鎖のことである．

$$\partial\langle s\rangle=\sum_{j=0}^{l+1}(-1)^j\langle v_0, v_1, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_{l+1}\rangle$$

ここで，文字の上の記号 ^ はその文字が除かれることを意味する．

注意 $\partial\langle s\rangle$ は，（向きを代表する順序の取り方によらずに）きちんと定義される．また $\partial\langle s\rangle$ に現われる辺の和集合 $\bigcup_{j=0}^{l+1}[v_0, v_1, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_{l+1}]$ は，$[s]$ の位相的境界になっている．

例 （1） $\partial\langle v_0, v_1\rangle=\langle v_1\rangle-\langle v_0\rangle$

（2） $\partial\langle v_0, v_1, v_2\rangle=\langle v_1, v_2\rangle-\langle v_0, v_2\rangle+\langle v_0, v_1\rangle$

$=\langle v_0, v_1\rangle+\langle v_1, v_2\rangle+\langle v_2, v_0\rangle$ （図 6.2 を見よ）

定義 K を単体的複体，$\mathcal{G}$ をアーベル群とする．**境界写像**

$$C_l(K, \mathcal{G}) \xleftarrow{\partial} C_{l+1}(K, \mathcal{G})$$

とは

$$\partial\left(\sum g_s\langle s\rangle\right)=\sum g_s\partial\langle s\rangle$$

によって定義される群の準同型写像をいう．

補題 写像

$$C_{l-1}(K, \mathcal{G}) \xleftarrow{\partial} C_l(K, \mathcal{G}) \xleftarrow{\partial} C_{l+1}(K, \mathcal{G})$$

は，次式を満たす．

$$\partial^2=\partial\circ\partial=0.$$

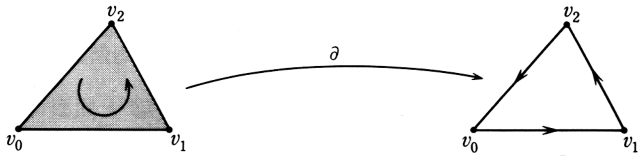


図 6.2

証明 $\partial\circ\partial$ は線形だから，生成元 $\langle v_0, v_1, \cdots, v_{l+1}\rangle$ についてだけ証明すればよい．それは次のようにできる．

$$\partial(\partial\langle v_0, \cdots, v_{l+1}\rangle)=\partial\left[\sum_{j=0}^{l+1}(-1)^j\langle v_0, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_{l+1}\rangle\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{l+1} (-1)^j \partial \langle v_0, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_{l+1} \rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{l+1} (-1)^j \Big[\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \langle v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_{l+1} \rangle$$

$$+ \sum_{i=j+1}^{l+1} (-1)^{i-1} \langle v_0, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_{l+1} \rangle \Big]$$

$$= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \langle v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_{l+1} \rangle$$

$$+ \sum_{i>j} (-1)^{i+j-1} \langle v_0, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_{l+1} \rangle$$

$$= \sum_{i<j} [(-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}] \langle v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_{l+1} \rangle$$

$$= 0. \quad ■$$

定義 $K, \mathcal{G}$ に対して

$$Z_l(K, \mathcal{G}) = [c \in C_l(K, \mathcal{G})\,;\ \partial c = 0]$$

$$B_l(K, \mathcal{G}) = [\partial c\,;\ c \in C_{l+1}(K, \mathcal{G})]$$

$$H_l(K, \mathcal{G}) = Z_l(K, \mathcal{G}) / B_l(K, \mathcal{G})$$

とする．$Z_l(K, \mathcal{G})$ の元を**輪体**，$B_l(K, \mathcal{G})$ の元を**境界**とよぶ．群 $H_l(K, \mathcal{G})$ を係数を $\mathcal{G}$ にもつ K の **l 次元ホモロジー群**とよぶ．

注意 群 $H_l(K, \mathcal{G})$ は実は $[K]$ の位相だけによってきまることがわかる．すなわち，$f = [K] \to [L]$ を同相写像とすると，それによって同型写像

$$f_*: H_l(K, \mathcal{G}) \to H_l(L, \mathcal{G})$$

が導かれる．特に，K_1 と K_2 を $[K_1] = [K_2]$ である単体的複体とすると，これらのホモロジー群は同型である．

問題 ベクトル空間 $H_0(K, R)$ の次元は $[K]$ の連結成分の個数と等しいことを示せ．

例 1 K を2-単体の1-骨格とする．K は3つの頂点 v_0, v_1, v_2 と，3つの1-単体 (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_0) とからできている．

このとき，$C_0(K, \mathcal{J})$ と $C_1(K, \mathcal{J})$ はともに $\mathcal{J} \oplus \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}$ と同型である．$l > 1$

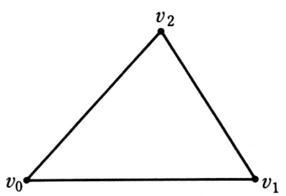


図 6.3

に対して $C_l(K, \mathcal{J})=0$ である．$C_1(K, \mathcal{J})$ の任意の元 c_1 は次の形に書ける．

$$c_1=m_1\langle v_0, v_1\rangle+m_2\langle v_1, v_2\rangle+m_3\langle v_2, v_0\rangle \qquad (m_1, m_2, m_3 \in \mathcal{J}).$$

この元の境界は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\partial c_1&=m_1(\langle v_1\rangle-\langle v_0\rangle)+m_2(\langle v_2\rangle-\langle v_1\rangle)+m_3(\langle v_0\rangle-\langle v_2\rangle)\\&=(m_3-m_1)\langle v_0\rangle+(m_1-m_2)\langle v_1\rangle+(m_2-m_3)\langle v_2\rangle.\end{aligned}$$

したがって，$c_1 \in Z_1(K, \mathcal{J})$ であるのは $m_3-m_1=0$, $m_1-m_2=0$, $m_2-m_3=0$. すなわち，$m_1=m_2=m_3$ のときである．だから

$$Z_1(K, \mathcal{J})=[n(\langle v_0, v_1\rangle+\langle v_1, v_2\rangle+\langle v_2, v_0\rangle)\,;\ n \in \mathcal{J}]\cong\mathcal{J}.$$

また，$C_2(K, \mathcal{J})=0$ だから $B_1(K, \mathcal{J})=0$. したがって

$$\boxed{H_1(K, \mathcal{J})=Z_1(K, \mathcal{J})/B_1(K, \mathcal{J})\cong\mathcal{J}.}$$

$H_0(K, \mathcal{J})$ を計算しよう．任意の元 $c_0 \in Z_0(K, \mathcal{J})$ は次の形をしている．

$$c_0=n_1\langle v_0\rangle+n_2\langle v_1\rangle+n_3\langle v_2\rangle \qquad (n_1, n_2, n_3 \in \mathcal{J}).$$

このとき，ある $c_1=m_1\langle v_0, v_1\rangle+m_2\langle v_1, v_2\rangle+m_3\langle v_2, v_0\rangle \in C_1(K, \mathcal{J})$ に対して $c_0=\partial c_1$ となるのは，方程式

$$m_3-m_1=n_1, \qquad m_1-m_2=n_2, \qquad m_2-m_3=n_3$$

が(整数の)解をもつときである．このような解が存在することと，$n_1+n_2+n_3=0$ とが同値であることは容易に確かめられる．したがって

$$B_0(K, \mathcal{J})=[n_1\langle v_0\rangle+n_2\langle v_1\rangle+n_3\langle v_2\rangle\,;\ n_1+n_2+n_3=0].$$

φ: $Z_0(K, \mathcal{J}) \to \mathcal{J}$ を $\varphi(n_1\langle v_0\rangle+n_2\langle v_1\rangle+n_3\langle v_2\rangle)=n_1+n_2+n_3$ によって定義される準同型写像とすると，φ の核はちょうど $B_0(K, \mathcal{J})$ である．したがって

$$\boxed{H_0(K, \mathcal{J})=Z_0(K, \mathcal{J})/B_0(K, \mathcal{J})\cong\mathcal{J}.}$$

例 2　K を2-単体 (v_0, v_1, v_2) のすべての開辺単体からなる複体とする．このとき，例1と同様に

$$\boxed{H_0(K, \mathcal{J})\cong\mathcal{J}.}$$

さらに，前と同様に

$$Z_1(K, \mathcal{J})=[n(\langle v_0, v_1\rangle+\langle v_1, v_2\rangle+\langle v_2, v_0\rangle)\,;\ n \in \mathcal{J}].$$

しかし，今度は

$$C_2(K, \mathcal{J})=[n\langle v_0, v_1, v_2\rangle\,;\ n \in \mathcal{J}]$$

であるから

$$B_1(K, \mathcal{J})=[\partial(n\langle v_0, v_1, v_2\rangle)\,;\ n \in \mathcal{J}]$$

$$=[n(\langle v_1, v_2\rangle-\langle v_0, v_2\rangle+\langle v_0, v_1\rangle)\,;\ n\in\mathcal{J}]$$
$$=[n(\langle v_0, v_1\rangle+\langle v_1, v_2\rangle+\langle v_2, v_0\rangle)\,;\ n\in\mathcal{J}]$$
$$=Z_1(K, \mathcal{J})$$

となり，

$$\boxed{H_1(K, \mathcal{J})=Z_1(K, \mathcal{J})/B_1(K, \mathcal{J})=0.}$$

最後に $\partial(n\langle v_0, v_1, v_2\rangle)=0$ であるのは $n=0$ のときだから，$Z_2(K, \mathcal{J})=0$. したがって

$$\boxed{H_2(K, \mathcal{J})=0.}$$

定義　K を単体的複体とする．K の l 次元**ベッチ数** $\boldsymbol{\beta_l}$ とは，整数

$$\beta_l=\dim H_l(K, R)$$

のことをいう．K の**オイラー数** $\chi(K)$ とは，整数

$$\chi(K)=\sum_{l=0}^{\dim K}(-1)^l\beta_l$$

のことをいう．

> **定理**　K を単体的複体とする．$0\leq l\leq\dim K$ なる各 l に対して，α_l で K の l-単体の数を表わす．このとき
>
> $$\chi(K)=\sum_{l=0}^{\dim K}(-1)^l\alpha_l.$$
>
> すなわち $\chi(K)$ は，(頂点の数)－(辺の数)＋(面の数)－･･･ に等しい．

証明　$0\leq l\leq\dim K$ なる各 l に対して，線形写像

$$C_{l-1}(K, R)\xleftarrow{\ \partial\ }C_l(K, R)$$

を考える．ただし，C_{-1} は定義によって 0 だけからなる空間である．すると，線形代数学の階数と核の次元の定理から

$$\alpha_l=\dim C_l(K, R)=\dim\operatorname{Ker}\partial+\dim\operatorname{Im}\partial$$
$$=\dim Z_l(K, R)+\dim B_{l-1}(K, R)\qquad(l=0, 1, \cdots, \dim K).$$

また

$$\beta_l=\dim H_l(K, R)=\dim[Z_l(K, R)/B_l(K, R)]$$
$$=\dim Z_l(K, R)-\dim B_l(K, R).$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\chi(K) &= \sum_{l=0}^{\dim K} (-1)^l \beta_l \\
&= \sum_{l=0}^{\dim K} (-1)^l [\dim Z_l(K, R) - \dim B_l(K, R)] \\
&= \sum_{l=0}^{\dim K} (-1)^l \dim Z_l(K, R) + \sum_{l=0}^{\dim K} (-1)^{l+1} \dim B_l(K, R) \\
&= \sum_{l=0}^{\dim K} (-1)^l \dim Z_l(K, R) + \sum_{l=1}^{\dim K} (-1)^l \dim B_{l-1}(K, R)
\end{aligned}
$$

($l=\dim K$ に対しては $B_l=0$ だから)

$$
= \sum_{l=0}^{\dim K} (-1)^l [\dim Z_l(K, R) + \dim B_{l-1}(K, R)]
$$

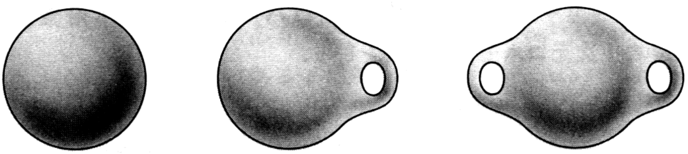
($\dim B_{-1}=0$ だから)

$$
= \sum_{l=0}^{\dim K} (-1)^l \alpha_l. \quad ▩
$$

注意 $[K]$ が連結，コンパクト，向きづけ可能な 2 次元多様体と同相ならば，$\beta_0=1$, $\beta_2=1$ であることがわかるから

$$\chi(K)=\beta_0-\beta_1+\beta_2=2-\beta_1, \qquad \text{すなわち} \qquad \beta_1=2-\chi(K).$$

また，β_1 はこのような K に対して常に偶数である．このような曲面は実はどれもある数の「ハンドル」をつけた球面に同相であることが証明される．$\beta_1/2$ はちょうどこのハンドルの数である(図 6.4 を見よ).



球面：$\beta_1=0$　　トーラス：$\beta_1=2$　　2 つのハンドルをもつ球面：$\beta_1=4$

図 6.4

したがって，ホモロジー群は，連結，コンパクト，向きづけ可能な曲面の同相類を完全に決定する．しかし，高次元の多様体の場合には，ホモロジー群は比較的少ない情報しか与えない．

さて，いままでのところ，単体的複体に対する“ホモロジー”群の理論について述べてきた．すなわち，次のような群と準同型写像から導かれる理論であった．

$$\cdots \xleftarrow{\partial} C_{l-1}(K, R) \xleftarrow{\partial} C_l(K, R) \xleftarrow{\partial} C_{l+1}(K, R) \longleftarrow \cdots$$

このとき，∂ は鎖の次元を下げる．一方，ド・ラム“コホモロジー”の場合に

は次の列を用いた．

$$\cdots \xrightarrow{d} C^{\infty}(X,\ \Lambda^{l-1}(X)) \xrightarrow{d} C^{\infty}(X,\ \Lambda^{l}(X)) \xrightarrow{d} C^{\infty}(X,\ \Lambda^{l+1}(X)) \longrightarrow \cdots$$

このとき，写像 d は次元を上げた．この2つの理論を比較するためには，“単体的コホモロジー”理論を定義すると都合がよい．これは，双対空間を考えることによってなされる．

定義　K を単体的複体とする．$0 \leq l \leq \dim K$ に対して

$$C^{l}(K)=[C_{l}(K,\ R)]^{*}$$

とする．$\partial^{*}:\ C^{l}(K) \to C^{l+1}(K)$ を，写像 $\partial:\ C_{l+1}(K,\ R) \to C_{l}(K,\ R)$ の共役作用素とする．つまり ∂^{*} は

$$[\partial^{*}(\varphi)](c)=\varphi(\partial c) \qquad (\varphi \in C^{l}(K)\ ;\ c \in C_{l+1}(K,\ R))$$

によって定義される．このとき次の列を得る．

$$\cdots \longrightarrow C^{l-1}(K) \xrightarrow{\partial^{*}} C^{l}(K) \xrightarrow{\partial^{*}} C^{l+1}(K) \longrightarrow \cdots$$

また，$\partial \circ \partial=0$ だから $\partial^{*} \circ \partial^{*}=0$．

$$Z^{l}(K)=[\varphi \in C^{l}(K)\ ;\ \partial^{*}\varphi=0]$$
$$B^{l}(K)=[\partial^{*}\varphi;\ \varphi \in C^{l-1}(K)]$$
$$H^{l}(K)=Z^{l}(K)/B^{l}(K)$$

とする．$C^{l}(K)$ の元を**コチェイン**とよぶ．$Z^{l}(K)$ の元を**コサイクル**，$B^{l}(K)$ の元を**コバウンダリー**とよぶ．写像 ∂^{*} を**コバウンダリー作用素**という．$H^{l}(K)$ を K の l 次元**コホモロジー群**という．

問題　$H^{l}(K)$ は $[H_{l}(K,\ R)]^{*}$ に同型であることを示せ．

コバウンダリー作用素 ∂^{*} の作用を直接に表わす式が必要である．任意の向きのついた K の l-単体 $\langle s \rangle$ に対して，$\varphi_{\langle s \rangle} \in C^{l}(K)$ を

$$\varphi_{\langle s \rangle}\langle t \rangle=\begin{cases} 1 & (\langle t \rangle=\langle s \rangle) \\ -1 & (\langle t \rangle=-\langle s \rangle) \\ 0 & (t \neq s) \end{cases}$$

によって定義する．したがって，$\{\langle s_1 \rangle,\ \cdots,\ \langle s_m \rangle\}$ が $C_{l}(K,\ R)$ の基底ならば（すなわち $\{s_1,\ \cdots,\ s_m\}$ が K の l-単体すべてである），$\{\varphi_{\langle s_1 \rangle},\ \cdots,\ \varphi_{\langle s_m \rangle}\}$ は $C^{l}(K)$ の双対基底である．∂^{*} は線形だから ∂^{*} の作用は生成元 $\varphi_{\langle s \rangle}$ についてだけ調べればよい．

補題　　$$\partial^{*}\varphi_{\langle v_0,\cdots,v_l \rangle}=\sum_{v}{}' \varphi_{\langle v,v_0,\cdots,v_l \rangle}$$

ここで，$\sum_v'$ は $(v, v_0, v_1, \cdots, v_l)$ が K の $(l+1)$-単体になる頂点 v のすべてについての和を表わす．

証明　上の式を向きのついた K の $(l+1)$-単体

$$\langle t\rangle=\langle w_0, w_1, \cdots, w_{l+1}\rangle$$

に対してだけ確かめればよい．$\langle s\rangle=\langle v_0, v_1, \cdots, v_l\rangle$ とおけば，左辺は

$$\begin{aligned}(\partial^*\varphi_{\langle s\rangle})(\langle t\rangle)&=\varphi_{\langle s\rangle}(\partial\langle t\rangle)\\&=\varphi_{\langle s\rangle}\left(\sum_{i=0}^{l+1}(-1)^i\langle w_0, \cdots, \hat{w}_i, \cdots, w_{l+1}\rangle\right)\\&=\sum_{i=0}^{l+1}(-1)^i\varphi_{\langle s\rangle}(\langle w_0, \cdots, \hat{w}_i, \cdots, w_{l+1}\rangle)\end{aligned}$$

となる．ところが，この和の各項はある j に対して $(w_0, \cdots, \hat{w}_j, \cdots, w_{l+1})=(s)$，すなわち (s) が (t) の辺でない限り 0 である．(s) が (t) の辺ならば，ある頂点 $v\in K$ に対して $(t)=(v, v_0, \cdots, v_l)$ と書ける．この場合には

（１）　$\langle t\rangle=\langle v, v_0, \cdots, v_l\rangle$ であって，$(\partial^*\varphi_{\langle s\rangle})(\langle t\rangle)=1$

であるか

（２）　$\langle t\rangle=-\langle v, v_0, \cdots, v_l\rangle$ であって，$(\partial^*\varphi_{\langle s\rangle})(\langle t\rangle)=-1$

であるかのどちらかである．

したがって

$$\begin{aligned}(\partial^*\varphi_{\langle s\rangle})(\langle t\rangle)&=\begin{cases}1 & (\text{ある } v \text{ に対して } \langle t\rangle=\langle v, v_0, \cdots, v_l\rangle \text{ のとき})\\-1 & (\text{ある } v \text{ に対して } \langle t\rangle=-\langle v, v_0, \cdots, v_l\rangle \text{ のとき})\\0 & (\text{それ以外のすべての場合})\end{cases}\\&=\left(\sum_v'\varphi_{\langle v, v_0, \cdots, v_l\rangle}\right)(\langle t\rangle).\end{aligned}$$

これは任意の$\langle t\rangle$に対して成り立つから補題の式は証明された．▮

6.2　ド・ラムの定理

定義　**滑らかに三角形分割された多様体**とは，組(X, K, h)で，X は C^∞-多様体，K は単体的複体，h: $[K]\to X$ が同相写像で，K の各単体 s に対して，写像 $h|_{[s]}$: $[s]\to X$ が $[s]$ の張る平面の中での $[s]$ の近傍 U 上の写像 h_s に拡張され，h_s: $U\to X$ が滑らかな部分多様体であるものをいう．

注意　$\dim X=n$ なら，K の任意の単体は，ある n-単体の辺であり，滑らかな写像の

部分多様体への制限は滑らかであるから，最後の条件は K の各 n-単体について成り立てばよい．

例　$X=S^n$ とする．K を S^n に外接する $(n+1)$-単体の n-骨格とする．h: $[K]\to S^n$ を半径に沿った射影とする．このとき，(X, K, h) は滑らかに三角形分割された多様体である(図 6.5)．

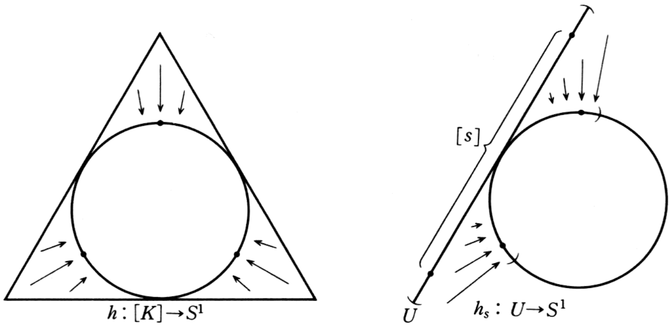


図 6.5

注意　コンパクトな滑らかな多様体は滑らかに三角形分割されることが証明できるが，証明はむずかしいので，ここでは述べない．任意の(有限)単体的複体に対して$[K]$はコンパクトだから，滑らかに三角形分割された多様体はコンパクトである．

この節の目標は，三角形分割された多様体(X, K, h)に対して X のド・ラムコホモロジーが X の単体的コホモロジーに同型であることを示すことである．このために，重心座標に関する次の性質が必要である．前に，ある点について，その点を含む単体の頂点に関する重心座標を考えた．この概念を拡張する．

定義　K を単体的複体とし，$v_1, \cdots, v_m$ で K の頂点を表わす．$x\in[K]$ とする．$j\in\{1, \cdots, m\}$ に対して，x の j 番目の**重心座標** $b_j(x)$ が次のように定義される．$x\notin \mathrm{St}(v_j)$ なら $b_j(x)=0$．$x\in \mathrm{St}(v_j)$ なら v_j を頂点にもつある単体 s に対して $x\in(s)$ であるから，$b_j(x)$ を s における頂点 v_j に関する重心座標とする．

このとき次のことは容易に確かめられる．

(1)　b_j: $[K]\to R$ は連続関数である．

(2)　任意の $x\in[K]$ に対して $b_j(x)\geq 0$ かつ$\displaystyle\sum_{j=1}^{m} b_j(x)=1$.

(3)　$x=\displaystyle\sum_{j=1}^{m} b_j(x)v_j$.

(4) ある $x\in[K]$ に対して $b_{j_0}(x)\neq 0,\ b_{j_1}(x)\neq 0,\ \cdots,\ b_{j_l}(x)\neq 0$ であることと, $v_{j_0},\ \cdots,\ v_{j_l}$ が K の l-単体の頂点であることとは同値である.

定義 K を単体的複体, s を K の単体とする. s の**星状体**とは, (s) を辺にもつ K のすべての単体 (t) についての開単体 (t) の和集合である.

このとき次が成り立つ.

(1) $s=v$ が K の 0-単体(すなわち頂点)のときは, 上の定義から

$$\mathrm{St}(s)=\mathrm{St}(v).$$

(2) $\mathrm{St}(s)$ は $[K]$ の開集合である(これは (3)から導かれる).

(3) $(s)=(v_{j_0},\ \cdots,\ v_{j_l})$, $x\in[K]$ とすると, $x\in\mathrm{St}(s)$ であるのは, すべての $i\in\{0,\ \cdots,\ l\}$ に対して $b_{j_i}(x)\neq 0$ となるときである.

(4) $(s)=(v_{j_0},\ \cdots,\ v_{j_l})$ とすると

$$[K]-\mathrm{St}(s)=[x\in[K];\ \text{ある } i\in\{0,\ \cdots,\ l\} \text{ に対して } b_{j_i}(x)=0].$$

(5) s_1 と s を異なる K の l-単体とすると, $[s_1]\subset[K]-\mathrm{St}(s)$.

滑らかに三角形分割された多様体 $(X,\ K,\ h)$ が与えられたとき, 各 l に対して $H^l(X,\ d)$ から $H^l(K)$ の上への同型写像を定義したい. このために, まず各 l に対して $\partial^*\circ f_l=f_{l+1}\circ d$ なる線形写像 $f_l\colon C^\infty(X,\ \Lambda^l(X))\to C^l(K)$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\longrightarrow & C^\infty(X,\ \Lambda^l(X)) & \xrightarrow{d} & C^\infty(X,\ \Lambda^{l+1}(X)) & \longrightarrow\cdots \\
 & \downarrow f_l & & f_{l+1}\downarrow & \\
\cdots\longrightarrow & C^l(K) & \xrightarrow{\partial^*} & C^{l+1}(K) & \longrightarrow\cdots
\end{array}$$

が与えられると, 準同型写像 $\tilde{f}_l\colon H^l(X,\ d)\to H^l(K)$ が定義されることに注意する. なぜなら, $d\omega=0$ $(\omega\in Z^l(X,\ d))$ とすると

$$\partial^*(f_l(\omega))=f_{l+1}(d\omega)=f_{l+1}(0)=0$$

であるから, $f_l(Z^l(X,\ d))\subset Z^l(K)$. また, $\omega=d\tau$ $(\omega\in B^l(X,\ d))$ なら

$$f_l(\omega)=f_l(d\tau)=\partial^*(f_{l-1}\tau)\in\mathrm{Im}\,\partial^*$$

であるから, $f_l(B^l(X,\ d))\subset B^l(K)$. したがって, f_l は

$$\tilde{f}_l\colon H^l(X,\ d)=Z^l(X,\ d)/B^l(X,\ d)\to Z^l(K)/B^l(K)=H^l(K)$$

を導く. そこで, 各 l に対して, そのような線形写像

$$\int_l\colon C^\infty(X,\ \Lambda^l(X))\to C^l(K)$$

を定義しよう. $\omega\in C^\infty(X,\ \Lambda^l(X))$ に対して $\int_l(\omega)$ は $C_l(K)$ 上の線形汎関数になるのだから, $\int_l(\omega)$ の値を $C_l(K)$ の基底の元, すなわち向きのついた l-単体

$\langle s\rangle$ について定めれば十分である． このために， 滑らかな写像 $h_s\colon U\to X$ を考える． このとき， $h_s{}^*(\omega)$ は $[s]$ の張る平面，すなわち， l 次元ユークリッド空間の中の開集合 U 上の滑らかな l-形式である．そこで，$\int_l(\omega)(\langle s\rangle)$ をこの l-形式の $\langle s\rangle$ 上での積分と定義する．すなわち

$$\int_l(\omega)(\langle s\rangle)=\int_{\langle s\rangle}h_s{}^*(\omega).$$

いいかえると，$(r_1,\cdots,r_l)$ を $\langle s\rangle$ の向きと両立する $[s]$ の張る平面の座標とする． つまり $\langle s\rangle=\langle v_0,\cdots,v_l\rangle$ なら $(r_1,\cdots,r_l)$ は順序のついた基 $\{v_1-v_0,\cdots,v_l-v_0\}$ に関する座標である．すると，U 上のある連続写像 g に対して

$$h_s{}^*(\omega)=g\,dr_1\wedge\cdots\wedge dr_l$$

と書け，

$$\int_l(\omega)(\langle s\rangle)=\int_{[s]}g\,dr_1\cdots dr_l \qquad \text{（リーマン積分）}$$

である．この積分は同相写像 h によらない．すなわち，この積分は変数変換の公式によって点集合 $h([s])$ とその向きだけできまる．

主張： $\boxed{\partial^*\circ\int_l=\int_{l+1}\circ d}$

これはまさしくストークスの定理である． なぜなら， 任意の滑らかな l-形式 ω と，向きのついた $(l+1)$-単体 $\langle s\rangle$ に対して

$$\begin{aligned}\left[\int_{l+1}\circ d(\omega)\right](\langle s\rangle)&=\int_{\langle s\rangle}(h_s)^*(d\omega)=\int_{\langle s\rangle}d(h_s{}^*(\omega))\\&=\int_{\partial\langle s\rangle}h_s{}^*(\omega) \qquad \text{（ストークスの定理による）}\\&=\int_l(\omega)(\partial\langle s\rangle)=\left[\partial^*\circ\int_l(\omega)\right]\langle s\rangle.\end{aligned}$$

したがって，$\int_l$ は準同型写像 $\tilde{\int_l}\colon H^l(X,d)\to H^l(K)$ を導く．

定理 （ド・ラムの定理） (X,K,h) を滑らかに三角形分割された多様体とする．このとき

$$\tilde{\int_l}\colon H^l(X,d)\to H^l(K)$$

は各 l $(0\leq l\leq \dim X)$ に対して同型写像である．

この定理は次の 2 つの補題から導かれる．

補題 1 次の性質 (1)～(4) を満たす線形写像

$$\alpha_l:\ C^l(K) \to C^\infty(X, \Lambda^l(X)) \qquad (0 \leq l \leq \dim X)$$

が存在する.

（1） $d \circ \alpha_l = \alpha_{l+1} \circ \partial^*$,

（2） $\int_l \circ \alpha_l =$恒等写像,

（3） C^0 を K の各頂点 v に対して $C^0(v)=1$ となる 0-コチェインとすると $\alpha_0(C^0)=1$. すなわち $\alpha_0(C^0)$ は定数関数 1 なる 0-形式である.

（4） $\langle s \rangle$ を K の向きのついた l-単体とすると, l-形式 $\alpha_l(\varphi_{\langle s \rangle})$ は $X-\mathrm{St}(s)$ のある近傍上で恒等的に 0 である.

補題 2 ω を X 上の閉 l-形式とする. ある $c \in C^{l-1}(K)$ に対して $\int_l(\omega) = \partial^* c$ であるとすると, $\int_{l-1}(\tau) = c$ かつ $d\tau = \omega$ となる X 上の $(l-1)$-形式 τ が存在する.

注意 補題1は $\tilde{\int_l}$ が全射であることを示している. 任意の $z \in Z^l(K)$ に対して $\omega = \alpha_l(z)$ とすると

$$d\omega = d \circ \alpha_l(z) = \alpha_{l+1} \circ \partial^*(z) = \alpha_{l+1}(0) = 0$$

だから $\omega \in Z^l(X, d)$. さらに $\int_l(\omega) = \int_l \circ \alpha_l(z) = z$. したがって $\int_l:\ Z^l(X, d) \to Z^l(K)$ は全射であるから $\tilde{\int_l}$ も全射である. (性質(1)から, 写像 α_l が準同型写像 $\tilde{\alpha}_l:\ H^l(K) \to H^l(X, d)$ を導き, 性質(2)から, この写像は $\tilde{\int_l}$ に対する右逆写像になっている.)

補題2は $\tilde{\int_l}$ が単射であることをいっている. なぜなら, もし $\omega \in Z^l(X, d)$ に対して $\int_l(\omega) \in B^l(K)$ とすると, 補題2より $\omega \in B^l(X, d)$ となる.

したがって, 前に述べたように補題1と2を合わせると, ド・ラムの定理がでる.

補題 1 の証明 記号を簡略化するために, $[K]$ と X を同相写像 h によって同一視する. すなわち $[K]=X$, $h=$恒等写像と仮定する.

第 1 段階 最初に, X の開被覆

$$\{\mathrm{St}(v)\ ;\ v \text{ は } K \text{ の頂点}\}$$

に従属するある特別な 1 の分割を構成する. $v_1, \cdots, v_m$ で K の頂点を表わす. 各 $j \in \{1, \cdots, m\}$ に対して b_j で $[K]=X$ 上の j 番目の重心座標を表わし,

$$F_j = \left[x \in X\ ;\ b_j(x) \geq \frac{1}{n+1} \right] \quad (n = \dim X)$$

$$G_j = \left[x \in X;\ b_j(x) \leq \frac{1}{n+2}\right]$$

とする．このとき，F_j と G_j は次の性質を満たす X の閉集合である（図 6.6）．

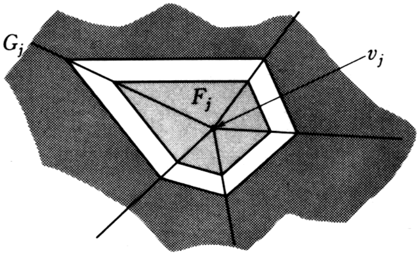


図 6.6

（1） $F_j \subset \mathrm{St}(v_j)$

（2） $X - \mathrm{St}(v_j) \subset G_j$

（3） $F_j \cap G_j = \phi$，すなわち $F_j \subset G_j'$

（4） 滑らかな関数 $f_j \geq 0$ が存在して，F_j 上では $f_j > 0$，G_j 上では $f_j = 0$（F_j はコンパクト空間 X の閉集合だからコンパクトである．したがって，F_j 上では正で，開集合 $G_j' \supset F_j$ の外では 0 になるある $f_j \geq 0$ が見いだせる）．

（5） 閉集合 F_j は X を被覆する（任意の $x \in X$ に対して，次元 $l \leq n$ のある単体 $(s) = (v_{j_0}, \cdots, v_{j_l})$ があって $x \in (s)$．このとき，$j \notin \{j_0, \cdots, j_l\}$ に対しては $b_j(x) = 0$ であり，$\sum_{i=0}^{l} b_{j_i}(x) = 1$．$l+1 \leq n+1$ だから，ある $j \in \{j_0, \cdots, j_l\}$ に対して $b_j(x) \geq 1/(n+1)$ となる．したがって，この j に対して $x \in F_j$）．

（6） (5)から $\sum_{j=1}^{m} f_j > 0$ であるから，$g_j = f_j \Big/ \sum_{k=1} f_k$ が X 上で定義されて，滑らかである．さらに，$\{g_j\}$ は $\{G_j'\}$ に従属する滑らかな 1 の分割である．すなわち $\sum_{j=1}^{m} g_j = 1$ で，g_j は G_j' の外では 0 である．$G_j' \subset \mathrm{St}(v_j)$ だから，1 の分割 $\{g_j\}$ は開被覆 $\{\mathrm{St}(v_j)\}$ にも従属している．

第 2 段階 上で定義した滑らかな関数 $\{g_j\}$ を用いて α_l を定義しよう．α_l は線形になるのだから，$C^l(K)$ の生成元 $\varphi_{\langle s \rangle}$ に対する α_l の値をきめてやればよい．向きのついた l-単体 $\langle s \rangle = \langle v_{j_0}, \cdots, v_{j_l} \rangle$ に対して $\alpha_l(\varphi_{\langle s \rangle})$ を，l-形式

$$\alpha_l(\varphi_{\langle s \rangle}) = l! \sum_{i=0}^{l} (-1)^i g_{j_i} dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l}$$

と定義する．

性質(1)～(4)を確かめよう．

性質(1)　明らかに

$$d\circ\alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle})=(l+1)!\,dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}.$$

一方，

$$\begin{aligned}\alpha_{l+1}\circ\partial^*(\varphi_{\langle s\rangle})&=\alpha_{l+1}\Big({\sum_{v_k}}'\varphi_{\langle v_k,v_{j_0},\cdots,v_{j_l}\rangle}\Big)\\&=(l+1)!\,{\sum_k}'\Big[g_k dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}\\&\qquad-\sum_{i=0}^{l}(-1)^i g_{j_i}dg_k\wedge dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{dg_{j_i}}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}\Big].\end{aligned}$$

主張　頂点 $v_k, v_{j_0}, \cdots, v_{j_l}$ がすべて異なり，かつ，K の $(l+1)$-単体の頂点になっていないならば，$g_k dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}\equiv 0$.

これを示そう．$x\notin \mathrm{St}(v_k)$ なら $g_k(x)=0$．$x\in\mathrm{St}(v_k)$ なら $b_k(x)\neq 0$．ところが，ある $i\in\{0,\cdots,l\}$ に対して $b_{j_i}(x)=0$ である．もしそうでないとすると，$b_k(x)\neq 0$, $b_{j_0}(x)\neq 0$, $\cdots$, $b_{j_l}(x)\neq 0$ だから，$(v_k, v_{j_0}, \cdots, v_{j_l})$ は $(l+1)$-単体になる．これは矛盾である．この i に対して

$$U=\left[y\in X;\ b_{j_i}(y)<\frac{1}{n+2}\right]$$

とすると，U は x を含む X の開集合である．$U\subset G_{j_i}$ だから，g_{j_i} は U 上で恒等的に 0 である．これで主張の証明ができた．

この結果を，$\alpha_{l+1}\circ\partial^*(\varphi_{\langle s\rangle})$ を表わす上の式の右辺に適用すると，

$$\text{(A)}\qquad {\sum_k}' g_k dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}=\sum_{k\notin\{j_0,\cdots,j_l\}}g_k dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}$$

を得る．右辺に現われて左辺にない項は恒等的に 0 なのである．また

$$\begin{aligned}\text{(B)}\qquad &{\sum_k}'\sum_{i=0}^{l}(-1)^i g_{j_i}dg_k\wedge dg_{j_0}\wedge\cdots\widehat{dg_{j_i}}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}\\&=\sum_{i=0}^{l}(-1)^i{\sum_k}' g_{j_i}dg_k\wedge dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{dg_{j_i}}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}\\&=\sum_{i=0}^{l}(-1)^i\sum_{k\notin\{j_0,\cdots,j_l\}}g_{j_i}dg_k\wedge dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{dg_{j_i}}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}\\&=\sum_{i=0}^{l}(-1)^i\sum_{k\neq j_i}g_{j_i}dg_k\wedge dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{dg_{j_i}}\wedge\cdots\wedge gd_{j_l}\\&=\sum_{i=0}^{l}(-1)^i g_{j_i}\Big(\sum_{k\neq j_i}dg_k\Big)\wedge dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{dg_{j_i}}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} g_k=1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{m} dg_k=0 \text{ だから}\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{l}(-1)^i g_{j_i}(-dg_{j_i})\wedge dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{dg_{j_i}}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}$$

$$=-\sum_{i=0}^{l} g_{j_i}dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}.$$

そこで，(A)から(B)を引くと

$$\alpha_{l+1}\circ\partial^*(\varphi_{\langle s\rangle})=(l+1)!\left(\sum_{k=1}^{m} g_k\right)dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}$$

$$=(l+1)!\,dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}=d\circ\alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle}).$$

性質(3)　$\alpha_0(\varphi_{\langle v_j\rangle})=g_j$ だから，$\alpha_0(C^0)=\alpha_0\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{\langle v_j\rangle}\right)=\sum_{j=1}^{m} g_j=1.$

性質(4)　$\langle s\rangle=\langle v_{j_0},\ \cdots,\ v_{j_l}\rangle$ とすると

$$\alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle})=l!\sum_{j=1}^{l}(-1)^i g_{j_i}dg_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{dg_{j_i}}\wedge\cdots\wedge dg_{j_l}.$$

もし，$x\in X$ がある $k\in\{0,\ \cdots,\ l\}$ に対して $b_{j_k}(x)<1/(n+2)$ となるならば，$x\in G_{j_k}$ だから g_{j_k} と dg_{j_k}，したがって $\alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle})$ が x で 0 である．結局，$\alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle})$ は $X-\mathrm{St}(s)$ を含む開集合

$$\left[x\in X;\ \text{ある } k\in\{0,\ \cdots,\ l\} \text{ に対して } b_{j_k}(x)<\frac{1}{n+2}\right]$$

の上で恒等的に 0 である．

性質(2)　帰納法で証明する．$l=0$ のとき，$\int_0\circ\alpha_0(\varphi_{\langle v_j\rangle})\ (j\in\{1,\ \cdots,\ m\})$ は

$$\left[\int_0\circ\alpha_0(\varphi_{\langle v_j\rangle})\right](\langle v_k\rangle)=\left[\int_0(g_j)\right]\langle v_k\rangle=g_j(v_k)$$

で与えられる 0-コチェインである． ところが，$k\neq j$ に対しては $v_k\notin\mathrm{St}(v_j)$ であり，$\mathrm{St}(v_j)$ の外では $g_j=0$ だから $g_j(v_k)=0$ である．さらに

$$1=\sum_{j=1}^{m} g_j(v_k)=g_k(v_k)\qquad(\text{各 } k \text{ に対して})$$

であるから

$$\left[\int_0\circ\alpha_0(\varphi_{\langle v_j\rangle})\right](\langle v_k\rangle)=\begin{cases}1 & (k=j)\\ 0 & (k\neq j)\end{cases}$$

$$=\varphi_{\langle v_j\rangle}(\langle v_k\rangle).$$

これはすべての j と k に対して成り立つから，求める結果 $\int_0\circ\alpha_0=$恒等写像

が得られる.

次に，性質(2)が次元 $l-1$ に対して成り立っていると仮定する. K の向きのついた l-単体 $\langle s\rangle$ と $\langle t\rangle$ に対して

$$\left[\int_l \circ \alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle})\right]\langle t\rangle = \int_{\langle t\rangle} \alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle}).$$

これが $\langle s\rangle=\langle t\rangle$ のとき 1 であり，$s\neq t$ のとき 0 であることを示さねばならない. $s\neq t$ に対してこれが 0 であるのは，$\alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle})$ が $X-\mathrm{St}(s)\supset[t]$ の近傍上で恒等的に 0 であるから性質(4)よりでる. したがって，$\int_{\langle s\rangle}\alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle})=1$ を確かめればよい. このために $s=\langle v_{j_0}, v_{j_1}, \cdots, v_{j_l}\rangle$，$\langle r\rangle=\langle v_{j_1}, \cdots, v_{j_l}\rangle$ としよう. このとき

$$\int_{\langle s\rangle}\alpha_l(\partial^*\varphi_{\langle r\rangle})=\int_{\langle s\rangle} d[\alpha_{l-1}(\varphi_{\langle r\rangle})]=\int_{\partial\langle s\rangle}\alpha_{l-1}(\varphi_{\langle r\rangle}).$$

また，$\partial\langle s\rangle=\langle r\rangle+$($\langle r\rangle$ 以外の向きのついた $(l-1)$-単体の交代和) であるから，帰納法の仮定によって

$$\int_{\partial\langle s\rangle}\alpha_{l-1}(\varphi_{\langle r\rangle})=\int_{\langle r\rangle}\alpha_{l-1}(\varphi_{\langle r\rangle})=1.$$

したがって

$$1=\int_{\langle s\rangle}\alpha_l(\partial^*\varphi_{\langle r\rangle})=\int_{\langle s\rangle}\alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle}+(\varphi_{\langle t\rangle}(t\neq s) \text{ の形の項}))=\int_{\langle s\rangle}\alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle}). \quad ▮$$

補題2を証明するために，次の補題を必要とする.

補題 3 s を R^n の中の k-単体とする.

(a_r) $r\geq 0$, $k\geq 1$ とする. ω を $[s^{k-1}]$ の「近く」で，すなわち $[s^{k-1}]$ のある近傍上で定義された滑らかな閉 r-形式とする. $k=r+1$ の場合には，さらに $\int_{\partial\langle s\rangle}\omega=0$ を仮定する. このとき $[s]$ の近くで定義された滑らかな r-形式 τ が存在して，$[s^{k-1}]$ の近くでは $\tau=\omega$ である.

(b_r) $r\geq 1$, $k\geq 1$ とする. ω を $[s]$ の近くで定義された滑らかな r-形式とする. τ を $[s^{k-1}]$ の近くで定義された滑らかな $(r-1)$-形式で，$[s^{k-1}]$ の近くで $d\tau=\omega$ が成り立つものとする. $k=r$ の場合は，さらに $\int_{\partial\langle s\rangle}\tau=\int_{\langle s\rangle}\omega$ を仮定する. このとき，$[s]$ の近くで定義された滑らかな $(r-1)$-形式 τ' が存在して，$[s^{k-1}]$ の近くで $\tau'=\tau$，$[s]$ の近くで $d\tau'=\omega$ となる.

注意 (a_r) と (b_r) において積分の条件が必要であることは，ストークスの定理からわかる. なぜなら，(a_r) において τ が存在したとすると，

$$\int_{\partial\langle s\rangle}\omega=\int_{\partial\langle s\rangle}\tau=\int_{\langle s\rangle}d\tau=\int_{\langle s\rangle}0=0$$

となる．また，(b_r)において τ' が存在したとすると，

$$\int_{\langle s\rangle}\omega=\int_{\langle s\rangle}d\tau'=\int_{\partial\langle s\rangle}\tau'=\int_{\partial\langle s\rangle}\tau.$$

補題3の証明　帰納法で証明する．最初に(a_0)を確かめ，次に

$$(a_0)\Longrightarrow(b_1)\Longrightarrow(a_1)\Longrightarrow(b_2)\Longrightarrow\cdots$$

を示す．

$(\boldsymbol{a}_0)$　ω は滑らかな0-形式，すなわち $[s^{k-1}]$ の近くで定義された滑らかな関数である．そして $d\omega=0$ だから，ω はその定義域の連結成分の上では定数である．$k>1$ なら，$[s^{k-1}]$ は連結だから ω は $[s^{k-1}]$ の近傍上の定数関数 c である．$[s]$ の近傍で $\tau=c$ とおく．$k=1$ の場合はある頂点 v_0, v_1 があって，$\langle s\rangle=\langle v_0, v_1\rangle$ で

$$0=\int_{\partial\langle s\rangle}\omega=\omega(v_1)-\omega(v_0)$$

となるから，v_0 の近くで一定である ω の値と，v_1 の近くでの ω の値は等しい．すなわち ω は前と同じく $[s^{k-1}]$ の近くで一定である．そこで，やはり τ を $[s]$ の近傍上でこの定数関数と等しくとればよい．

$(\boldsymbol{a}_{r-1})\Longrightarrow(\boldsymbol{b}_r)$　ω は $[s]$ を含む開集合の上で定義された閉 r-形式$(r\geq 1)$である．ポアンカレの補題によって(5.2節参照)，ω は $[s]$ の近くで完全である．すなわち，$[s]$ の近くで定義された滑らかな $(r-1)$-形式 τ_1 が存在して，$[s]$ の近くで $d\tau_1=\omega$ となる(ここで，ポアンカレの補題が適用できることを見るには，$[s]$ を含む任意の開集合は開円板と微分同相(滑らかな逆をもつ滑らかな同相写像で同相)な $[s]$ を含むもう1つの開集合を含むことに注意しさえすればよい．実際 $[s]$ を含む星型領域をとることができる)．さて，一般には τ_1 は $[s^{k-1}]$ の近くで τ に等しくはない．$[s^{k-1}]$ の近くでこの差 $\tau_1-\tau$ を考えると，これは $[s^{k-1}]$ の近くで

$$d(\tau_1-\tau)=\omega-\omega=0$$

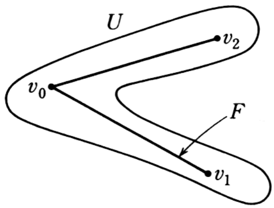
となり，閉である．さらに，$k=(r-1)+1=r$ の場合は

$$\int_{\partial\langle s\rangle}(\tau_1-\tau)=\int_{\partial\langle s\rangle}\tau_1-\int_{\partial\langle s\rangle}\tau=\int_{\langle s\rangle}d\tau_1-\int_{\partial\langle s\rangle}\tau=\int_{\langle s\rangle}\omega-\int_{\partial\langle s\rangle}\tau$$
$$=0\qquad(\text{仮定による}).$$

そこで，形式 $\tau_1-\tau$ に(a_{r-1})が適用できて，$[s]$ の近くで定義された閉 $(r-1)$-形式 μ が存在して，$[s^{k-1}]$ の近くで $\mu=\tau_1-\tau$ が成り立つ．$\tau'=\tau_1-\mu$ とする

と，τ' は $[s]$ の近くで定義された滑らかな $(r-1)$-形式で，$[s^{k-1}]$ の近くでは $\tau'=\tau_1-\mu=\tau$. また，$[s]$ の近くで $d\tau'=d\tau_1-d\mu=\omega-0=\omega$ となる.

$(\boldsymbol{b}_r)\Longrightarrow(\boldsymbol{a}_r)$　適当に頂点 $v_0, \cdots, v_k$ を選んで $\langle s\rangle=\langle v_0, \cdots, v_k\rangle$ とし，$\langle t\rangle=\langle v_1, \cdots, v_k\rangle$ とおく．$F=[s^{k-1}]-(t)$ とする．ω は閉だから，ポアンカレの補題によって F の近くで定義された滑らかな $(r-1)$-形式 μ が存在して F の近くで $d\mu=\omega$ となる(F は星型であるから，F を含む任意の開集合は F の星型近傍 U を含む．図 6.7 を見よ)．特に，$[t^{k-2}]$ の近くで $d\mu=\omega$.



$\langle s\rangle=\langle v_0, v_1, v_2\rangle$，$\langle t\rangle=\langle v_1, v_2\rangle$

図 6.7

$k>1$ の場合，形式 ω, μ と$(k-1)$-単体 t に対して(b_r)を適用したい．そのために，$k-1=r$ のときに $\int_{\langle t\rangle}\omega-\int_{\partial\langle t\rangle}\mu=0$ を確かめなければならない．そこで，$c=\partial\langle s\rangle-\langle t\rangle$ とおくと，$\partial c=-\partial\langle t\rangle$ で

$$\int_{\langle t\rangle}\omega-\int_{\partial\langle t\rangle}\mu=\int_{\langle t\rangle}\omega+\int_{\partial c}\mu=\int_{\langle t\rangle}\omega+\int_c d\mu$$

$$=\int_{\langle t\rangle}\omega+\int_c\omega$$ （c の各単体は F に含まれ，F の近くで $d\mu=\omega$ であるから）

$$=\int_{\partial\langle s\rangle}\omega=0$$ （仮定による）.

(b_r) を適用すると，$[t]$ の近くで定義された形式 μ' が存在して，$[t^{k-2}]$ の近くで $\mu'=\mu$，$[t]$ の近くで $d\mu'=\omega$ である．μ と μ' の定義域の共通部分では μ と μ' は一致しているから，それらを張り合わせて得られる $[s^{k-1}]$ の近くの形式を μ_2 とする．このとき，$[s^{k-1}]$ の近くで $d\mu_2=\omega$ である．なぜなら，μ も μ' もそれぞれの定義域でこの式が成り立つ．

$k=1$ の場合は，$[s^{k-1}]$ は 2 つの頂点 v_0, v_1 とからできている．ω は閉だから，ポアンカレの補題によって，v_i の近くの滑らかな$(r-1)$-形式 μ_i $(i=0, 1)$ が存在して $d\mu_i=\omega$ となる．定義域を小さくすることによって，μ_0 の定義域と

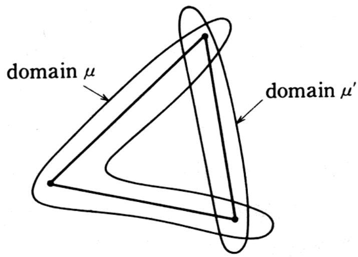


図 6.8

μ_1 の定義域が交わらないと仮定してよい．これによって前と同じく $[s^{k-1}]$ の近くで $d\mu_2=\omega$ となる $[s^{k-1}]$ の近くの形式 μ_2 が定義される．

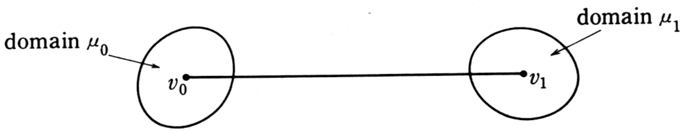


図 6.9

最後に $[s^{k-1}]$ の小さな近傍上で恒等的に 1，μ_2 の定義域の外で恒等的に 0 である滑らかな関数を f とする．そして $f\mu_2$ を考えれば，これは $[s]$ の近くで定義された滑らかな $(r-1)$-形式である．$\tau=d(f\mu_2)$ とすると，τ は $[s]$ の近くで定義された閉 r-形式で，$[s^{k-1}]$ の近くでは $f\equiv 1$，$df\equiv 0$ であるから

$$\tau=d(f\mu_2)=df\wedge\mu_2+fd\mu_2=d\mu_2=\omega. \quad ▨$$

補題 2 の証明　次の条件を満たす $(l-1)$-形式

$$\tau_0,\ \tau_1,\ \cdots,\ \tau_n=\tau \qquad (n=\dim X)$$

を帰納的につくる．

（1）　τ_k は K の k-骨格 $[K^k]$ の近傍で定義されている，

（2）　$[K^k]$ の近くで $d\tau_k=\omega$,

（3）　$[K^{k-1}]$ の近くで $\tau_k=\tau_{k-1}$,

（4）　$\int_{l-1}(\tau_{l-1})=c.$

これができれば補題は証明される．なぜなら，(4)から任意の向きのついた K の $(l-1)$-単体 $\langle s\rangle$ と各 $k\geq l-1$ に対して

$$\int_{l-1}(\tau_k)(\langle s\rangle)=\int_{\langle s\rangle}\tau_k=\int_{\langle s\rangle}\tau_{l-1}=\int_{l-1}(\tau_{l-1})(\langle s\rangle)=c(\langle s\rangle).$$

τ_0 をつくるために，K^0 を互いに交わらない円板の集まりで被覆する．ω は

閉だから，ポアンカレの補題によって各円板上で完全である．したがって，これらの円板の和集合上で定義された滑らかな $(l-1)$-形式 τ_0' が存在して $d\tau_0'=\omega$ である．$l-1\neq 0$ なら $\tau_0=\tau_0'$ とする．$l-1=0$ の場合は $\int_0(\tau_0)=c$ としたい．ところが，$[K]$ の頂点 v_j に対して

$$\int_0(\tau_0')(\langle v_j\rangle)=\int_{\langle v_j\rangle}\tau_0'=\tau_0'(v_j).$$

そこで $a_j=c(v_j)-\tau_0'(v_j)$ とし，τ_0 を v_j を含む円板上で $\tau_0=\tau_0'+a_j$ と定義する．そうすると，$[K^0]$ の近くで $d\tau_0=d\tau_0'=\omega$ であり，また $\int_0(\tau_0)=c.$

次に性質 (1)～(4) を満たす τ_{k-1} がつくられたとしよう．τ_k をつくるのであるが，各 k-単体 s に対して $[s]$ の近傍で定義された滑らかな $(l-1)$-形式 $\tau_k(s)$ で，$[s]$の近くで $d(\tau_k(s))=\omega$，$[s^{k-1}]$ の近くで $\tau_k(s)=\tau_{k-1}(s)$ となるものが見つかったなら，それらを張り合わせることによって性質(1)～(3)を満たす滑らかな $(l-1)$-形式 τ_k' が得られることに注意する．

$\tau_k(s)$ をつくるために補題3の(b_l)を使う．ω は $[s]$ の近くで定義された滑らかな l-形式で，τ_{k-1} は $[s^{k-1}]$ の近くで定義された $(l-1)$-形式である．そして $[s^{k-1}]$ の近くでは $d\tau_{k-1}=\omega$ が成り立っている．さらに $k=l$ なら

$$\begin{aligned}\int_{\langle s\rangle}\omega&=\int_l(\omega)(\langle s\rangle) &&(\langle s\rangle=s\text{ にいずれかの向きをつけたもの})\\&=\partial^*c(\langle s\rangle) &&(\text{仮定による})\\&=c(\partial\langle s\rangle)\\&=\int_{k-1}(\tau_{k-1})(\partial\langle s\rangle) &&(k=l\text{ だから，(4)による})\\&=\int_{\partial\langle s\rangle}\tau_{k-1}.\end{aligned}$$

したがって，(b_l)が適用できる．よって，$[s]$ の近くの滑らかな $(l-1)$-形式 $\tau_k(s)$ が存在して，$[s^{k-1}]$ の近くで $\tau_k(s)=\tau_{k-1}$，$[s]$ の近くで $d(\tau_k(s))=\omega$ となる．これで性質(1)～(3)を満たす τ_k' ができた．$k\neq l-1$ なら，$\tau_k=\tau_k'$ とする．$k=l-1$ の場合には，性質(1)～(3)を満たす τ_{l-1}' が得られたから $\int_{l-1}(\tau_{l-1})=c$ なる τ_{l-1} がほしい．$c_1=c-\int_{l-1}(\tau_{l-1}')$ として，$[K^{l-1}]$ の近傍で τ_{l-1} を

$$\tau_{l-1}=\tau_{l-1}'+\alpha_{l-1}(c_1)$$

と定義する．ただし，α_{l-1} は補題1で定義された線形写像 $C^{l-1}(K)\to C^\infty(X, \Lambda^{l-1}(X))$ である．

各 r と任意の向きのついた r-単体 $\langle s\rangle$ に対して，$\alpha_r(\varphi_{\langle s\rangle})$ は $X-\mathrm{St}(s)$ の近

傍上で恒等的に0である．特に，$\alpha_r(\varphi_{\langle s\rangle})$ は $[K_{r-1}]$ の近くで恒等的に 0．各 $c \in C^r(K)$ はこのような $\varphi_{\langle s\rangle}$ の線形結合だから，$\alpha_r(c)$ は任意の r-コチェイン c に対して $[K^{r-1}]$ の近くで恒等的に0である．

このことを，まず $r=l$，次に $r=l-1$ に対して適用すると，$[K^{l-1}]$ の近くで

$$d\tau_{l-1}=d\tau_{l-1}'+d\circ\alpha_{l-1}(c_1)=d\tau_{l-1}'+\alpha_l\circ\partial^*(c_1)=d\tau_{l-1}'=\omega,$$

$[K^{l-2}]$ の近くで

$$\tau_{l-1}=\tau_{l-1}'+\alpha_{l-1}(c_1)=\tau_{l-1}'=\tau_{l-2}.$$

したがって，τ_{l-1} は $k=l-1$ とした性質(1)～(3)を満足している．性質(4)も，次によって満たされる．

$$\int_{l-1}(\tau_{l-1})=\int_{l-1}(\tau_{l-1}')+\int_{l-1}\circ\alpha_{l-1}(c_1)=(c-c_1)+c_1=c. \quad ▮$$

注意 1　ド・ラムの定理は，滑らかに三角形分割された多様体(X, K, h)の(係数を R にもつ)単体的コホモロジー群が X のド・ラム コホモロジー群と同型なことをいっている．特に，これらの群は X の三角形分割(K, h)によらない．コホモロジー群はホモロジー群に双対的であり，滑らかな多様体 $[K]$ に対する群 $H_l(K, R)$ は $[K]$ だけに依存して単体的細分 K の取り方によらない．

注意 2　直和 $\sum_{l=0}^{\dim X}\oplus H^l(X, d)$ に結合的多元環の構造を次のように入れることができる．$\sum_{l=0}^{\dim X}\oplus C^\infty(X, \Lambda^l(X))$ は外積∧によって結合的多元環になっていた．$\sum\oplus Z^l(X, d)$ は部分多元環である．なぜなら，$d\omega=0$, $d\tau=0$ とすると，$d(\omega\wedge\tau)=(d\omega)\wedge\tau\pm\omega\wedge(d\tau)=0$．$\sum\oplus B^l(X, d)$ は $\sum\oplus Z^l(X, d)$ の中のイデアルである．なぜなら，$\omega=d\mu$, $d\tau=0$ とすると $\omega\wedge\tau=d(\mu\wedge\tau)$．したがって

$$\sum_l\oplus H^l(X, d)=\sum_l\oplus(Z^l(X, d)/B^l(X, d))\cong\sum_l\oplus Z^l(X, d)\Big/\sum_l\oplus B^l(X, d)$$

も結合的多元環である．特に $\sum_l\oplus H^l(X, d)$ は環であって，X の**ド・ラム コホモロジー環**とよばれる．

単体的コホモロジーにも，キャップ積とよばれる積が定義できて，$\sum_l\oplus H^l(K)$ は多元環になる．また，同型写像 $\int:\ \sum_l\oplus H^l(X, d)\to\sum_l\oplus H^l(K)$ が多元環としての同型写像であることが証明できる．

注意 3　補題3は，実は

$$H^l(S^n, d)=\begin{cases}0 & (0<l<n)\\ R & (l=0,\ n)\end{cases}$$

ということの証明も含んでいる．なぜなら，ω を $(n+1)$-単体 s の n-骨格 $[s^n]$ の近傍で定義された閉 l-形式 $(0<l<n)$ とすると，ω は $[s]$ 上の閉 (したがって，完全) l-形式に拡大できることが示された．これは $0<l<n$ に対して $H^l(S^n, d)=0$ を意味する．$l=$

n のときは，$[s^n]$ の近くで定義された $\int_{\partial\langle s\rangle}\omega=0$ である任意の閉 n-形式 ω は完全であることが示された．$\omega\to\int_{\partial\langle s\rangle}\omega$ によって定義される写像 $Z^n(S^n, d)\to \boldsymbol{R}$ は，核として $B^n(S^n, d)$ をもつ準同型写像である．したがって $H^n(S^n, d)=\boldsymbol{R}$．また，$S^n$ は連結であるから $H^0(S^n, d)=\boldsymbol{R}$．

上の議論で，S^n 上の任意の閉 l-形式は S^n の近傍で定義された閉 l-形式に拡大できることを，暗もくのうちに仮定してきた．しかし，Ψ: $\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}\to S^n$ を半径に沿った射影として，$\Psi^*\omega$ を考えるとこれがそのような拡大になっている．

7章　曲面のリーマン幾何学

7.1　平行移動と接続

定義　M を2次元の向きづけられたリーマン多様体とする．M の接ベクトル束を $T(M)$ と表わす．

$$S(M)=[(m,\ v)\in T(M);\ \langle v,\ v\rangle=1]$$

とする．$S(M)$ を M の**球面束**あるいは**円周束**という．$T(M)$（あるいは $S(M)$）の点に対して $(m,\ v)$ という記号は $v\in T(M,\ m)$ なのだから，重複しているが，v が m における接ベクトルであることを強調して，この記号を使おう．

いま次のことに注意する．

（1）　$S(M)$ は3次元の滑らかな多様体である．なぜなら，$f(m,\ v)=\langle v,\ v\rangle$ によって定義される関数 $f\colon T(M)\to R^1$ は滑らかで，$f=1$ になるところでは $df\neq 0$ だから，陰関数の定理が適用できる．

（2）　円周 $S^1=[z\in C;\ |z|=1]$ は（複素数の）掛け算によって群である．$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ だから，群 S^1 はちょうど向きづけられた平面 R^2 の回転群である．この群は $S(M)$ に作用する．すなわち，滑らかな写像

$$A\colon S^1\times S(M)\to S(M)$$

が

$$A(g,\ (m,\ v))=(m,\ gv)$$

$$(g\in S^1;\ (m,\ v)\in S(M))$$

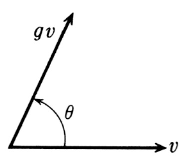


図 7.1

によって与えられる．ここで，gv は，向きのついた平面 $T(M,\ m)$ を g によって回転させたときの v の像を表わす．このとき，$g=e^{i\theta}$ で $\{v_1,\ v_2\}$ が $T(M,\ m)$ に対する向きのついた直交基底とすると，ある $c_1,\ c_2\in R^1$ に対して $v=c_1v_1+c_2v_2$ と書け，

$$gv = (c_1\cos\theta - c_2\sin\theta)v_1 + (c_1\sin\theta + c_2\cos\theta)v_2.$$

場合によっては $A(g, (m, v))$ のことを簡単に $g(m, v)$ と表わす．このとき，各 $g \in S^1$ に対して $g: S(M) \to S(M)$ は滑らかである．

（3） $\pi: S(M) \to M$ を射影とすると，$\pi^{-1}(m)$ はちょうど $T(M, m)$ の中の単位円周である．さらに，(m, v_1), (m, v_2) を $\pi^{-1}(m)$ の任意の2つの元とすると，$(m, v_2) = (m, gv_1)$ となる $g \in S^1$ が一意的に存在する（θ を v_1 から v_2 への正の回転角とし，$g = e^{i\theta}$ とせよ）．

（4） $S(M)$ は局所的には積空間である．これを示そう．U を M の座標近傍，(x_1, x_2) を座標とし，e_1 をベクトル場 $(\partial/\partial x_1)/\|\partial/\partial x_1\|$ とする．ただし，$\|\partial/\partial x_1\| = \langle(\partial/\partial x_1), (\partial/\partial x_1)\rangle^{1/2}$．このとき，$e_1$ は U 上の滑らかなベクトル場でその長さは各点で1である．そこで，e_1 によって，滑らかな写像 $c: U \to \pi^{-1}(U)$ を $c(m) = (m, e_1(m))$ と定義すると，明らかに $\pi\circ c = i_U$ が成り立つ．次に $B: U \times S^1 \to \pi^{-1}(U)$ を

$$B(m, g) = gc(m) = (m, ge_1(m)) = A(g, (m, e_1(m)))$$

と定義すると，B が滑らかで，単射かつ全射であること，また，dB がすべての点で非退化，したがって，B^{-1} も滑らかであることが容易にわかる．

注意 $S(M)$ が大域的に M と S^1 の積だということは正しくない．M の上で滑らかで0にならないベクトル場が存在すれば，前の議論によって $S(M)$ は $M \times S^1$ と微分同相になるが，一般にはこのようなベクトル場は存在しない（たとえば，$M = S^2$ の場合）．

$M = R^2$ の場合は，接ベクトルをそれ自身と平行に移動するという概念は明白である．さて，このことを，任意の向きづけられた2次元リーマン多様体の接ベクトルの**平行移動**という概念に一般化しよう．あとでわかることだが，曲線に沿って1点から他の1点にベクトルを平行移動することはできるが，その結果は曲線の取り方によるのである．特に，閉曲線に沿って平行移動させても，元のベクトルが得られるとは限らない．この新しいベクトルは元のベクトルと，S^1 のある元による回転だけ異なっている．$M = R^2$ は「平坦な空間」だからこの回転は0である．任意の M に対してこの回転（正確には，曲線が1点に縮んだときの極限）が M の m での「曲率」を測ることになる．

この平行移動の概念を発展させて，リーマン多様体 M の曲率の内在的意味，すなわち M がはいっている周囲の空間に依存しない意味が得られる．第8章では，M が R^3 の部分多様体のときに，この曲率の別な解釈を与える．

平行移動は等長写像であることを要求する．したがって，曲線 $\alpha: [a, b] \to M$ に沿って単位ベクトルを平行移動させると，各 $t \in [a, b]$ に対して，単位接

ベクトル $\tilde{\alpha}(t) \in T(M, \alpha(t))$ が得られる．$v \in \pi^{-1}(\alpha(a))$ を平行移動することによって，$\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ となる曲線 $\tilde{\alpha}$: $[a, b] \to S(M)$ がきまる．さらに

$$v_1 \in \pi^{-1}(\alpha(a)), \qquad v_1 = gv \quad (g \in S^1)$$

なら，v_1 を平行移動することによって得られる曲線 $\tilde{\alpha}_1$: $[a, b] \to S(M)$ は

$$\tilde{\alpha}_1(t) = g\tilde{\alpha}(t) \qquad (t \in [a, b])$$

で与えられる．逆に，各曲線 α: $[a, b] \to M$ と，$\alpha(a)$ での接ベクトル v に対応して，上の条件を満たす「もち上げ」$\tilde{\alpha}$: $[a, b] \to S(M)$ が一意的に存在するならば，平行移動の概念が定義されるのである(図 7.2 を見よ)．

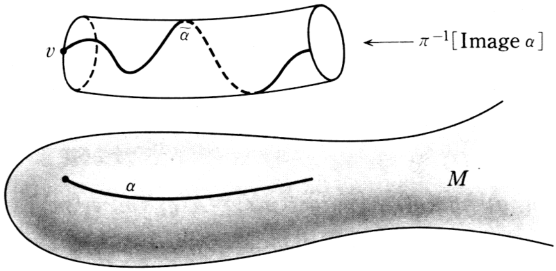


図 7.2

被覆空間の場合には，ファイバー $p^{-1}(x)$ が離散的であったから，任意の曲線のもち上げは一意的であった．しかし，今度の場合はファイバー $\pi^{-1}(m)$ は離散的でなく円周になっている．したがって，もち上げは一意的でない．実際どの方向に動き出すのかさえきまらない ($d\pi(\tilde{v}) = \dot{\alpha}(a)$ となるベクトル $\tilde{v} \in T(S(M), (m, v))$ は直線全体だけあり，そのどれもが $\dot{\tilde{\alpha}}(a)$ の候補である)．したがって，$m \in M$, $v \in T(M, m)$ が与えられたとき，m を通る各曲線 α に対して $\tilde{\alpha}$ の最初の方向をきめる必要がある．すなわち，各 $\dot{\alpha}(a) \in T(M, m)$ に対して，$d\pi(\dot{\tilde{\alpha}}(a)) = \dot{\alpha}(a)$ となるベクトル $\dot{\tilde{\alpha}}(a) \in T(S(M), (m, v))$ を選ぶことが必要である．ベクトル $\dot{\tilde{\alpha}}(a)$ を選ぶことは，もち上げ $\tilde{\alpha}$ をきめることより弱いことのように思えるが，後でわかるように，$\pi^{-1}(\alpha([a, b]))$ の各点でベクトルを選べば，実は，もち上げ，したがって平行移動がきまる．

このようなベクトル $\dot{\tilde{\alpha}}(a)$ を一意的にきめる自然な方法は，$d\pi$ によって $T(M, m)$ に同型に写される $T(S(M), (m, v))$ の 2 次元部分空間を与え，その中に $\dot{\tilde{\alpha}}(a)$ がはいるように要請することである．このような部分空間は，**垂直な空間**

$$d\pi^{-1}(0) = [t \in T(S(M), (m, v)) ;\ d\pi(t) = 0]$$

の補空間である.

定義 $S(M)$ 上の**接続**とは，各点 $(m, v) \in S(M)$ で次の条件を満たすような $T(S(M), (m, v))$ の 2 次元部分空間 $\mathcal{H}(m, v)$ を選ぶことである.

(1) $T(S(M), (m, v)) = \mathcal{H}(m, v) \oplus d\pi^{-1}(0)$. すなわち，各部分空間 $\mathcal{H}(m, v)$ は垂直な空間の補空間である.

(2) 各 $g \in S^1$ に対して $dg(\mathcal{H}(m, v)) = \mathcal{H}(m, gv)$.

(3) $\mathcal{H}$ の選択は滑らか. すなわち各点 $(m, v) \in S(M)$ に対して (m, v) を含む開集合 U と，U 上の滑らかなベクトル場 X, Y が存在して，$\{X, Y\}$ が U の各点で空間 $\mathcal{H}$ を張る.

$S(M)$ の各点で，垂直な空間 $d\pi^{-1}(0)$ を張る $S(M)$ 上の滑らかなベクトル場 V が存在する. それは，次のようにつくられる. S^1 上の通常の単位ベクトル場を $\partial/\partial\theta$ で表わすと，$\partial/\partial\theta$ は S^1 上の $g \in S^1$ の作用に対して不変である. すなわち

$$dg\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\bigg|_h = \frac{\partial}{\partial\theta}\bigg|_{gh} \qquad (\text{各 } h \in S^1 \text{ に対して}).$$

$(m, v) \in S(M)$ に対して

$$A^1(g) = g(m, v) = (m, gv)$$

で定義される滑らかな写像 $A^1 \colon S^1 \to S(M)$ を考え，

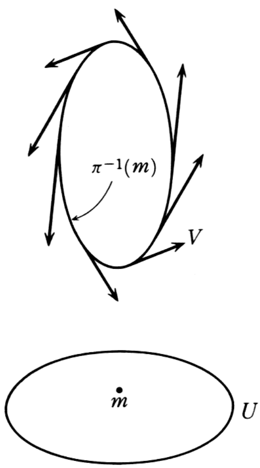


図 7.3

$$V(m, v) = dA^1\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_1\right)$$

と定義する．M の m での局所座標近傍 U と，対応する直和の表現

$$T(S(M), (m, v)) = T(M, m) \oplus T(S^1, g) \quad ((m, v) \in \pi^{-1}(U))$$

（ここで，g は $v = ge_1$ なるもの）を用いていえば，V は

$$V(m, v) = \left(0, \left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_g\right)$$

で与えられる．特に，V は滑らかで決して 0 にならない．また $d\pi(V) = 0$ かつ各 $h \in S^1$ に対して $dh(V) = V$ である．

定義　$\mathscr{H}$ を $S(M)$ 上の接続とする．$\mathscr{H}$ の **1-形式**，あるいは，**接続 1-形式**とは，次のように定義される $S(M)$ 上の 1-形式 φ をいう．

$$q: T(S(M), (m, v)) = \mathscr{H}(m, v) \oplus d\pi^{-1}(0) \to d\pi^{-1}(0)$$

を射影とする．各 $t \in T(S(M), (m, v))$ に対して λ を $q(t) = \lambda V$ となる実数として，$\varphi(t) = \lambda$ とおく．

φ の局所的表示　X, Y を $S(M)$ の開集合 U 上で定義された滑らかなベクトル場で，各 $(m, v) \in U$ で $\{X(m, v), Y(m, v)\}$ が $\mathscr{H}(m, v)$ を張るものとする．このとき，$\{V(m, v), X(m, v), Y(m, v)\}$ は各 $(m, v) \in U$ で $T(S(M), (m, v))$ の基底になっている．$\{\varphi_1(m, v), \varphi_2(m, v), \varphi_3(m, v)\}$ を，対応する $T^*(S(M), (m, v))$ の双対基底とする．このとき φ_1, φ_2, φ_3 は U 上の滑らかな 1-形式であり，$\varphi = \varphi_1$．特に

（1）　φ_1 が滑らかだから φ は滑らか．

（2）　$\varphi(V) \equiv 1$.

（3）　各 $g \in S^1$ に対して $g^*\varphi = \varphi$．なぜなら $t \in T(S(M), (m, v))$ とすると $t = \lambda V + t_1$ ($\lambda \in R$; $t_1 \in \mathscr{H}$) と書けて

$$\begin{aligned}(g^*\varphi)(t) &= \varphi \circ dg(t) = \varphi(\lambda dg(V) + dg(t_1)) \\ &= \varphi(\lambda V) \qquad (dg(\mathscr{H}) \subset \mathscr{H} \text{ より}) \\ &= \lambda = \varphi(t).\end{aligned}$$

> **補題**　ψ を $\psi(V) \equiv 1$, かつ $g^*\psi = \psi$ なる $S(M)$ 上の滑らかな 1-形式とすると，$\mathscr{H} = \psi^{-1}(0)$ は $S(M)$ 上の接続で，その接続 1-形式が ψ になる．

証明　各 $(m, v) \in S(M)$ に対して，$\psi(m, v): T(S(M), (m, v)) \to R$ は線形汎関数である．$\dim T(S(M), (m, v)) = 3$ だから，$\psi^{-1}(0)$ は 2 次元である．

$V\notin\psi^{-1}(0)$ だから，$\psi^{-1}(0)$ は垂直な空間の補空間である．$g^*\psi=\psi$ だから，$dg(\psi^{-1}(0))=\psi^{-1}(0)$． ▌

U を M の座標近傍とする．$\pi^{-1}(U)=S(U)=U\times S^1$ 上で接続を調べてみよう．U の中の座標 (x_1, x_2) が与えられると，$c(m)=(m, (\partial/\partial x_1)/\|\partial/\partial x_1\|)$ によって滑らかな写像 c: $U\to\pi^{-1}(U)$ が定義される．$m\in M$ に対して

$$\mathscr{H}_1(c(m))=dc(T(U, m))$$

とおくと，$\mathscr{H}_1(c(m))$ は垂直な空間の補空間である．なぜなら

$$d\pi(\mathscr{H}_1(c(m)))=d\pi\circ dc(T(U, m))=d(\pi\circ c)(T(U, m))=T(U, m)$$

だから，$\mathscr{H}_1(c(m))$ は2次元で，$d\pi|_{\mathscr{H}_1(c(m))}$ は同型写像である．さらに，$d\pi(V)=0$ だから $V\notin\mathscr{H}_1$.

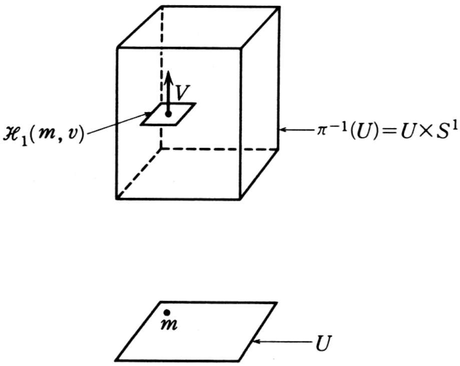


図 7.4

さて，$\mathscr{H}_1(gc(m))=dg(\mathscr{H}_1(c(m))$ とおく．c によって与えられる $\pi^{-1}(U)=U\times S^1$ の積の表示を用いていえば，$\mathscr{H}_1(m, v)$ はちょうど，部分多様体 $U\times\{v\}$ の (m, v) での接空間である．正確には，B: $U\times S^1\to\pi^{-1}(U)$ を $B(m, g)=gc(m)=(m, ge_1(m))$ によって定義される同相写像とすると

$$\mathscr{H}_1(m, v)=dB(T(U\times\{g\}, (m, g))).$$

ここで，$g\in S^1$ は $ge_1(m)=v$. この接続の 1-形式 φ_1 は

$$\varphi_1=(B^{-1})^*(\widetilde{d\theta}).$$

ここで，p: $U\times S^1\to S^1$ は射影，$d\theta$ は $\partial/\partial\theta$ に双対的な S^1 上の 1-形式で

$$\widetilde{d\theta}=p^*(d\theta).$$

この**特別な接続**に対しては $d\varphi_1=0$ である．なぜなら

$$d\varphi_1=d[(B^{-1})^*\circ p^*(d\theta)]=d[(p\circ B^{-1})^*(d\theta)]=(p\circ B^{-1})^*(d(d\theta))=0.$$

注意　$d(d\theta)=0$，これは $d\theta$ が 0-形式の微分だからではなく(実際，そうではない)，S^1 上には 0 でない 2-形式は存在しないからである．

いままでの接続の定義は，平行移動の概念を構成することが動機であった．そこで，今度は $S(M)$ 上の接続が与えられると，平行移動が実際に定義されることを証明しよう．

定理　$\mathscr{H}$ を $S(M)$ 上の接続とし，その 1-形式を φ とする．α: $[a, b]\to M$ を M の中の区分的 C^∞-曲線とする．$v\in T(M, \alpha(a))$ を $\|v\|=1$ なるものとする．このとき，$(\alpha(a), v)$ を通る区分的 C^∞-曲線 $\tilde{\alpha}$: $[a, b]\to S(M)$ (α の**水平もち上げ**とよばれる) が一意的に存在して，次の条件を満たす．

(1)　$\pi\circ\tilde{\alpha}=\alpha$,

(2)　$\dot{\tilde{\alpha}}(t)\in\mathscr{H}(\tilde{\alpha}(t))$ すなわち $\varphi(\dot{\tilde{\alpha}}(t))=0$
(任意の $t\in[a, b]$ に対して),

(3)　$\tilde{\alpha}(a)=(\alpha(a), v)$.

ベクトル $\tilde{\alpha}(b)\in T(M, \alpha(b))$ が v を α に沿って $\alpha(b)$ まで**平行移動**したものである．

この定理の証明は，準備として次の 2 つの補題を必要とする．

補題 1　$\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ を $S(M)$ 上の 2 つの接続とし，その接続形式を φ_1, φ_2 とすると

(1)　$(\varphi_2-\varphi_1)(V)\equiv 0$,

(2)　$g^*(\varphi_2-\varphi_1)=\varphi_2-\varphi_1$　(すべての $g\in S^1$ に対して),

(3)　$\varphi_2-\varphi_1=\pi^*(\tau)$　(ある M 上の滑らかな 1-形式 τ に対して).

証明　(1)と(2)は明らか．(1)と(2)から(3)がでることを示そう．ϕ を $\phi(V)\equiv 0$，かつすべての $g\in S^1$ に対して $g^*\phi=\phi$ である $S(M)$ 上の滑らかな 1-形式とすると，ある τ に対して $\phi=\pi^*(\tau)$ を示せばよい．$v\in T(M, m)$ での τ の値をきめるために，$(m, v_1)\in\pi^{-1}(m)$ とし，$w\in T(S(M), (m, v_1))$ を $d\pi(w)=v$ なるものとする．$\tau(v)=\phi(w)$ とする．$\tau(v)$ は $d\pi^{-1}(v)$ の中の w のとり方によらない．なぜなら，$d\pi(w_1)=v$ より $d\pi(w_1-w)=0$ だから，ある λ に対して $w_1-w=\lambda V$．したがって

$$\phi(w_1)=\phi(w+\lambda V)=\phi(w)+\lambda\phi(V)=\phi(w).$$

また $\tau(v)$ は $\pi^{-1}(m)$ の中の点 (m, v_1) のとり方によらない．なぜなら，もし

$$(m, v_2) \in \pi^{-1}(m)$$

なら，ある $g \in S^1$ に対して $v_2 = gv_1$．さらに，$w \in T(S(M), (m, v_1))$ が $d\pi(w) = v$ を満たすと，$dg(w) \in T(S(M), (m, v_2))$ は $d\pi(dg(w)) = v$ を満たし，

$$\psi|_{(m,v_2)}(dg(w)) = \psi|_{g(m,v_1)}(dg(w)) = g^*\psi|_{(m,v_1)}(w) = \psi|_{(m,v_1)}(w).$$

τ は滑らか．なぜなら，座標近傍 U では $c(m) = (m, e_1(m))$ で定義される

$$c\colon U \to \pi^{-1}(U)$$

に対して $\tau(v) = \psi \circ dc(v)$ である． ▩

補題 2 $\alpha\colon [a, b] \to M$ を M の中の滑らかな曲線とする．$\tilde{\alpha}\colon [a, b] \to S(M)$ と $\tilde{\beta}\colon [a, b] \to S(M)$ を $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$，$\pi \circ \tilde{\beta} = \alpha$ なる滑らかな曲線とする．$\tilde{\alpha}$ は，接続 1-形式が φ である $S(M)$ 上のある接続 $\mathscr{H}$ に関して水平，すなわち $\varphi(\dot{\tilde{\alpha}}(t)) \equiv 0$ とする．このとき，滑らかな関数 $\theta\colon [a, b] \to R$ が存在して次の条件を満たす．

(1) $\tilde{\beta}(t) = e^{i\theta(t)}\tilde{\alpha}(t)$ $(t \in [a, b])$，かつ

(2) $\varphi(\dot{\tilde{\beta}}(t)) = (d\theta/dt)(t)$ $(t \in [a, b])$．

さらに，$\tilde{\alpha}(a) = \tilde{\beta}(a)$ なら $\theta(a) = 0$ となるように θ をとれる．

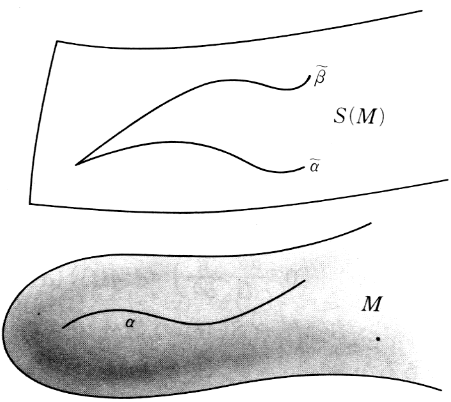


図 7.5

証明 $\hat{g}\colon [a, b] \to S^1$ を

$$\tilde{\beta}(t) = \hat{g}(t)\tilde{\alpha}(t) \qquad (t \in [a, b])$$

によって定義する．$\hat{g}$ が滑らかな曲線になることは容易に確かめられる．R は S^1 の被覆空間であるから $\hat{g}$ のもち上げ $\theta\colon [a, b] \to R$ が存在する（図 7.6 を見よ）．さらに，$\tilde{\alpha}(a) = \tilde{\beta}(a)$ なら $\hat{g}(a) = 1$．したがって，$\theta(a) = 0$ であるも

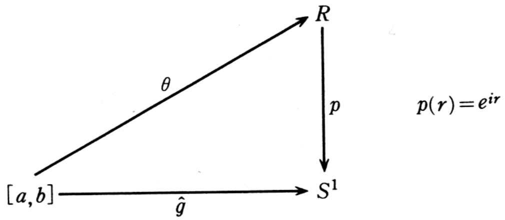


図 7.6

ち上げが一意的に存在する．

p は滑らか，かつ局所的には滑らかな逆をもつから，θ は滑らか．さらに

$$\tilde{\beta}(t)=\hat{g}(t)\tilde{\alpha}(t)=p\circ\theta(t)\tilde{\alpha}(t)=e^{i\theta(t)}\tilde{\alpha}(t)$$

となり，(1)を満足する．

(2)を確かめるために，まず，曲線

$$\hat{g}\colon [a,\, b]\to S^1 \qquad (\hat{g}(t)=e^{i\theta(t)})$$

の接ベクトルが次の式で与えられることに注意する．

$$\dot{\hat{g}}(t)=(p\circ\theta)^{\cdot}(t)=d(p\circ\theta)\left(\frac{d}{dt}\right)=dp\left(d\theta\left(\frac{d}{dt}\right)\right)$$

$$=dp\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\right)=\frac{d\theta}{dt}dp\left(\frac{d}{dt}\right)=\frac{d\theta}{dt}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

座標近傍 $U\subset M$ に制限して，対応する積としての表示 $\pi^{-1}(U)\cong U\times S^1$ に関して考えれば，ある $h(t)=e^{i\varphi(t)}\in S^1$ に対して，$\tilde{\alpha}(t)=h(t)c(\alpha(t))=(\alpha(t),\, h(t))$．また，$\tilde{\beta}(t)=(\alpha(t),\,\hat{g}(t)h(t))=(\alpha(t),\, e^{i(\theta(t)+\varphi(t))})$．したがって，$\tilde{\alpha}$ の $\tilde{\alpha}(t)$ での接ベクトルは $(\dot{\alpha}(t),\,(d\varphi/dt)(\partial/\partial\theta))$．一方，$\tilde{\beta}$ の $\tilde{\beta}(t)$ での接ベクトルは $(\dot{\alpha}(t),\,[(d\theta/dt)+(d\varphi/dt)](\partial/\partial\theta))$．すなわち

$$\dot{\tilde{\beta}}(t)=d(\hat{g}(t))(\dot{\tilde{\alpha}}(t))+\left(0,\,\frac{d\theta}{dt}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=d(\hat{g}(t))(\dot{\tilde{\alpha}}(t))+\frac{d\theta}{dt}V.$$

ただし，$d(\hat{g}(t))$ は $\hat{g}(t)\colon S(M)\to S(M)$ の微分である．$\dot{\tilde{\alpha}}(t)$ は水平で，$d(\hat{g}(t))(\mathscr{H})\subset\mathscr{H}$ であるから

$$\varphi(\dot{\tilde{\beta}}(t))=\frac{d\theta}{dt}\varphi(V)=\frac{d\theta}{dt}. \quad ▊$$

定理の証明　定理は滑らかな曲線 α に対して証明すれば十分である．そうすれば，区分的に滑らかな曲線に対しては，各滑らかな部分を一意的にもち上げればよい．

局所的存在　U を M の中の座標近傍とする．$\pi^{-1}(U)=S(U)$ への水平もち上げが一意的に存在することを示す．$c\colon U\to S(U)$ をいつもの写像とする．

すなわち $m \in U$ に対して $c(m)=(m, e_1(m))$. まず, $\mathcal{H}$ が $\pi^{-1}(U)$ 上では積の構造を用いてつくった特別の接続 $\mathcal{H}_1$ になっている場合に, α の水平もち上げ $\tilde{\alpha}_1$ で $\tilde{\alpha}_1(a)=c(\alpha(a))$ となるものが一意的に存在することをいおう. 実際, $\tilde{\alpha}_1$: $[a, b] \to \pi^{-1}(U)$ を $\tilde{\alpha}_1=c\circ\alpha$ と定義すれば, $\pi\circ\tilde{\alpha}_1=\pi\circ c\circ\alpha=\alpha$. また $\dot{\tilde{\alpha}}_1(t)=dc(\dot{\alpha}(t)) \in \mathcal{H}_1(c(t))$ だから, $\tilde{\alpha}_1$ は水平もち上げである. さらに, $\tilde{\alpha}_1$ は

$$\tilde{\alpha}_1(a)=c(\alpha(a))$$

なる $\mathcal{H}_1$-水平もち上げとして一意的である. なぜなら, $\tilde{\alpha}_2$ をそのようなもう1つのもち上げとすると, 補題2より $\theta(a)=0$ なるある滑らかな関数 θ に対して

$$\tilde{\alpha}_2(t)=e^{i\theta(t)}\tilde{\alpha}_1(t).$$

また $\varphi_1(\dot{\tilde{\alpha}}_2(t))=d\theta/dt$. ただし, φ_1 は $\mathcal{H}_1$ の接続1-形式である. $\tilde{\alpha}_2$ が $\mathcal{H}_1$-水平であるのは, $\varphi_1(\dot{\tilde{\alpha}}_2(t))\equiv 0$ のとき, すなわち $d\theta/dt\equiv 0$. したがって, $\theta(t)$は定数. $\theta(a)=0$ だから $\theta(t)\equiv 0$. 結局, すべての t に対して, $\tilde{\alpha}_2(t)=\tilde{\alpha}_1(t)$ となり, $\tilde{\alpha}_2=\tilde{\alpha}_1$.

したがって, α は $\tilde{\alpha}_1(a)=c(\alpha(a))$ なる $\mathcal{H}_1$-水平なもち上げ $\tilde{\alpha}_1$ を一意的にもつ. 次に, 接続1-形式 φ をもつ元の接続を考えよう. このとき, 補題1によってある U 上の滑らかな1-形式 τ に対して

$$\varphi_1-\varphi=\pi^*(\tau).$$

$\tilde{\alpha}$ を $\pi\circ\tilde{\alpha}=\alpha$ なる $\pi^{-1}(U)$ の中の任意の曲線とすると, 補題2より, $\tilde{\alpha}(t)=e^{i\theta(t)}\tilde{\alpha}_1(t)$, かつ $\varphi_1(\dot{\tilde{\alpha}}(t))=d\theta/dt$. したがって, $\tilde{\alpha}$ が $\mathcal{H}$-水平なのは $\varphi(\dot{\tilde{\alpha}}(t))\equiv 0$, すなわち

$$(\varphi_1-\varphi)(\dot{\tilde{\alpha}}(t))\equiv\varphi_1(\dot{\tilde{\alpha}}(t))=\frac{d\theta}{dt}$$

のときである. 一方

$$(\varphi_1-\varphi)(\dot{\tilde{\alpha}}(t))=(\pi^*(\tau))(\dot{\tilde{\alpha}}(t))=\tau(d\pi\dot{\tilde{\alpha}}(t))=\tau(\dot{\alpha}(t)).$$

したがって, $\tilde{\alpha}$ が $\mathcal{H}$-水平なのは $d\theta/dt=\tau(\dot{\alpha}(t))$ のとき, すなわちある定数 θ_0 に対して $\theta=\int_a^t\tau(\dot{\alpha}(t))dt+\theta_0$ のときである. そこで, α の $\mathcal{H}$-水平なもち上げ $\tilde{\alpha}$ は

$$\hat{g}(t)=e^{i\theta_0}\exp\left[i\int_a^t\tau(\dot{\alpha}(t))dt\right]$$

として

$$\tilde{\alpha}(t)=\hat{g}(t)(c\circ\alpha(t))$$

である. 各単位ベクトル $v \in T(U, \alpha(a))$ に対して, $(\alpha(a), v)=e^{i\theta_0}(\alpha(a), e_1)$

となる θ_0 が $0\leq\theta_0<2\pi$ の範囲に一意的に存在する．この θ_0 に対して上の式によって $\tilde{\alpha}(a)=(\alpha(a),\ v)$ なる $\mathcal{H}$-水平なもち上げ $\tilde{\alpha}$ が一意的に与えられる．

大域的存在　大域的な存在をいうために，α: $[a,\ b]\to M$ とし

$$t_0=\sup[t\in[a,\ b]\ ;\ \alpha|_{[a,t]} \text{ は(一意的な)もち上げ } \tilde{\alpha} \text{ をもつ}]$$

とする．$t_0=b$ を示したい．$t_0\neq b$ としてみる．次に，α の区間 $[t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon]$ への制限を考える．局所的存在から，これは十分小さな $\varepsilon>0$ に対して $\tilde{\tilde{\alpha}}(t_0)=(\alpha(t_0),\ w)\in S(M)$ なる一意的もち上げ $\tilde{\tilde{\alpha}}$ をもつ．このとき，ある $g\in S^1$ に対して $\tilde{\alpha}(t_0-\varepsilon)=g\tilde{\tilde{\alpha}}(t_0-\varepsilon)$ であり，$g\tilde{\tilde{\alpha}}$ は $g\tilde{\tilde{\alpha}}(t_0-\varepsilon)=\tilde{\alpha}(t_0-\varepsilon)$ なる水平もち上げである．一意性より，区間 $[t_0-\varepsilon,\ t_0)$ 上で $g\tilde{\tilde{\alpha}}=\tilde{\alpha}$．したがって，$g\tilde{\tilde{\alpha}}$ は $\tilde{\alpha}$ を t_0 を越えて拡張している．これは t_0 の定義に矛盾する．▨

注意　$\pi^{-1}(U)$ 上の特別な接続 $\mathcal{H}_1$ に対しては，平行移動は曲線のとり方によらない．実際，ベクトル場 $e_1=(\partial/\partial x_1)/\|\partial/\partial x_1\|$ は U の中の任意の曲線に対して平行である．

7.2　構造方程式と曲率

定義　滑らかで向きづけられた2次元リーマン多様体 M の円周束 $S(M)$ を考える．$S(M)$ 上の2つの滑らかな1-形式 ω_1 と ω_2 が次のように定義される．$t\in T(S(M),\ (m,\ v))$ に対して

$$\omega_1(t)=\langle d\pi(t),\ v\rangle,\qquad \omega_2(t)=\langle d\pi(t),\ iv\rangle.$$

ここで，$iv=e^{i\pi/2}v$ は $T(M,\ m)$ での角度 $\pi/2$ だけの回転による v の像である(後に示すように，これらの1-形式は実際滑らかである)．

このとき次が成立する．

1．$\omega_1(t)$ と $\omega_2(t)$ は $T(M,\ m)$ の直交基底 $\{v,\ iv\}$ に関する $d\pi(t)$ の成分である．すなわち

$$d\pi(t)=\omega_1(t)v+\omega_2(t)(iv).$$

2．$\mathcal{H}$ を接続1-形式が φ である $S(M)$ 上の接続とする．このとき，$\{\varphi,\ \omega_1,\ \omega_2\}$ は各 $(m,\ v)\in S(M)$ で $T^*(S(M),\ (m,\ v))$ の基底である．

証明　$\dim T^*(S(M),\ (m,\ v))=3$ だから，この3つの形式の値が同時に0となる0でない $t\in T(S(M),\ (m,\ v))$ が存在しないことをいえばよい．そうすれば，これらの形式は線形独立である．ところが，$\omega_1(t)=\omega_2(t)=0$ なら，$d\pi(t)=0$ だから t は垂直的，すなわち，ある λ に対して $t=\lambda V$．さらに，$\varphi(t)=0$ なら $\lambda=\varphi(\lambda V)=\varphi(t)=0$ となり $t=0$ である．▨

3．$g=e^{i\theta}\in S^1$ とすると

$$g^*\omega_1=(\cos\theta)\omega_1+(\sin\theta)\omega_2, \qquad g^*\omega_2=-(\sin\theta)\omega_1+(\cos\theta)\omega_2.$$

証明　$gv=(\cos\theta)v+(\sin\theta)(iv)$．したがって $t\in T(S(M),(m,v))$ に対して

$$\begin{aligned} g^*\omega_1|_{(m,v)}(t)&=\omega_1|_{(m,gv)}(dg(t))=\langle d\pi\circ dg(t),\ gv\rangle \\ &=\langle d\pi(t),\ gv\rangle=\langle d\pi(t),\ (\cos\theta)v+(\sin\theta)iv\rangle \\ &=(\cos\theta)\omega_1(t)+(\sin\theta)\omega_2(t). \end{aligned}$$

同様に

$$g^*\omega_2(t)=-(\sin\theta)\omega_1(t)+(\cos\theta)\omega_2(t). \quad ▒$$

4．任意の $g=e^{i\theta}\in S^1$ に対して $g^*(\omega_1\wedge\omega_2)=\omega_1\wedge\omega_2$．なぜなら

$$g^*(\omega_1\wedge\omega_2)=g^*\omega_1\wedge g^*\omega_2=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\omega_1\wedge\omega_2=\omega_1\wedge\omega_2.$$

さらに，t_1 か t_2 が垂直的なら $\omega_1\wedge\omega_2(t_1,\ t_2)=0$.

ゆえに，ある τ に対して $\varphi_2-\varphi_1=\pi^*(\tau)$ であるということの証明と同様に(7.1節)，2–形式 $\omega_1\wedge\omega_2$ は M 上の(一意的な)ある形式の π^* による像である．

定義　向きづけられた滑らかな2次元リーマン多様体 M の**体積要素**とは，M 上の滑らかな2–形式 vol であって

$$\pi^*(\mathrm{vol})=\omega_1\wedge\omega_2$$

すなわち，$v_1,\ v_2\in T(M,\ m)$ に対して

$$\mathrm{vol}(v_1,\ v_2)=\omega_1\wedge\omega_2|_{(m,v)}(v_1',\ v_2')$$

が，$d\pi(v_i')=v_i$ $(i=1,\ 2)$ である任意の

$$(m,\ v)\in\pi^{-1}(m)\subset S(M), \qquad v_1',\ v_2'\in T(S(M),\ (m,\ v))$$

に対して成り立つものである．

U を $(x_1,\ x_2)$ を座標とする M の座標近傍とする．$e_1=\partial/\partial x_1\big/\|\partial/\partial x_1\|$ とし，$\omega_1',\ \omega_2'$ を各 $m\in U$ で $\{e_1(m),\ ie_1(m)\}$ に双対的な $T^*(M,\ m)$ の基底をなす U 上の滑らかな1–形式とする．$c(m)=(m,\ e_1(m))$ によって，写像

$$c:\ U\to\pi^{-1}(U)\subset S(M)$$

をきめる．このとき，$v\in T(M,\ m)$ に対して

$$(c^*\omega_1)(v)=\omega_1(dc(v))=\langle d\pi\circ dc(v),\ e_1\rangle=\langle v,\ e_1\rangle=\omega_1'(v)$$

となり，$\omega_1'=c^*\omega_1$．同様に $\omega_2'=c^*\omega_2$．特に

$$\omega_1'\wedge\omega_2'=c^*\omega_1\wedge c^*\omega_2=c^*(\omega_1\wedge\omega_2)=c^*\circ\pi^*(\mathrm{vol})=(\pi\circ c)^*(\mathrm{vol})$$

であり，$\pi\circ c=i_U$ だから

$$\boxed{\mathrm{vol}|_U=\omega_1'\wedge\omega_2'.}$$

さて，$\tilde{\omega}_i=\pi^*\omega_i'$ $(i=1, 2)$とおくと，$\tilde{\omega}_1$ と $\tilde{\omega}_2$ は $\pi^{-1}(U)\subset S(M)$ 上の滑らかな 1-形式で,

$$\tilde{\omega}_1\wedge\tilde{\omega}_2=\pi^*\omega_1'\wedge\pi^*\omega_2'=\pi^*(\omega_1'\wedge\omega_2')=\pi^*(\mathrm{vol})=\omega_1\wedge\omega_2.$$

さらに，$c(U)$ の各点 $(m, e_1(m))$ で $\omega_i=\tilde{\omega}_i$. なぜなら，$t\in T(S(M), (m, e_1))$ とすると

$$\begin{aligned}\omega_1(t)e_1+\omega_2(t)(ie_1)&=d\pi(t)=\omega_1'(d\pi(t))e_1+\omega_2'(d\pi(t))(ie_1)\\&=\tilde{\omega}_1(t)e_1+\tilde{\omega}_2(t)(ie_1).\end{aligned}$$

さらに，$g=e^{i\theta}\in S^1$ に対して

$$g^*\tilde{\omega}_i=g^*\circ\pi^*\omega_i'=(\pi\circ g)^*\omega_i'=\pi^*\omega_i'=\tilde{\omega}_i$$

であることに注意すると，上の **3.** より

$$\begin{aligned}(g^*\omega_1)|_{(m,e_1)}&=(\cos\theta)\omega_1+(\sin\theta)\omega_2|_{(m,e_1)}\\&=(\cos\theta)\tilde{\omega}_1+(\sin\theta)\tilde{\omega}_2|_{(m,e_1)}\\&=(\cos\theta)g^*\tilde{\omega}_1+(\sin\theta)g^*\tilde{\omega}_2|_{(m,e_1)}.\end{aligned}$$

$(g^{-1})^*$ を施すと，形式 ω_1 と $\tilde{\omega}_i$ は，(m, ge_1) で

$$\omega_1=(\cos\theta)\tilde{\omega}_1+(\sin\theta)\tilde{\omega}_2$$

の関係にある．同様に

$$\omega_2=-(\sin\theta)\tilde{\omega}_1+(\cos\theta)\tilde{\omega}_2.$$

特に，上の式から ω_1 と ω_2 は滑らかである．

注意 高次元のリーマン多様体に対しても同様にして体積要素が得られる．向きづけられたリーマン多様体 M の座標近傍を U, そこでの座標を $(x_1, \cdots, x_n)$ とし，$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ が U の向きを与えるようにとっておく．ベクトル場 $\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n$ を考える．グラム-シュミットの直交化法を用いて，各点で接空間の正規直交基底をなす U 上の滑らかなベクトル場 $e_1, \cdots, e_n$ が得られる．$\omega_1', \cdots, \omega_n'$ をそれに双対的な 1-形式とする．このとき，n-形式 $\mathrm{vol}|_U=\omega_1'\wedge\cdots\wedge\omega_n'$ は U 上の(向きもこめた)座標系のとり方によらないから，大域的な 0 でない n-形式 vol を定義する．

向きづけられた 2 次元リーマン多様体 M と，接続 1-形式が φ である $S(M)$ 上の接続が与えられると，1-形式 φ, ω_1, ω_2 は $S(M)$ の各点で余接空間の基底をなす．したがって，2-形式 $\omega_1\wedge\omega_2$, $\omega_1\wedge\varphi$, $\omega_2\wedge\varphi$ は $S(M)$ の各点で 2-形式全体の空間の基底をなすから，$d\varphi$, $d\omega_1$, $d\omega_2$ をこの基で表わすことができる．その結果できる式を**カルタンの構造方程式**とよぶ．次に，これを導くが，まず第 2 構造方程式から始める．

第 2 構造方程式 座標近傍 U をとり，$\pi^{-1}(U)$ 上の特別な接続を $\mathscr{H}_1$ とし，その接続 1-形式を φ_1 とする．このとき，$d\varphi_1=0$ だから，ある U 上の滑らかな 1-形式 τ に対して

$$d\varphi = d\varphi - d\varphi_1 = d(\varphi - \varphi_1) = d(\pi^*\tau) = \pi^*(d\tau).$$

さて，$d\tau$ は U 上の 2-形式だから，体積要素の何倍かになっている．すなわち U 上のある滑らかな関数 K に対して

$$d\varphi = \pi^*(-K\,\mathrm{vol}) = \pi^*(-K)\pi^*(\mathrm{vol}),$$

すなわち

$$\boxed{d\varphi = -(K\circ\pi)\omega_1\wedge\omega_2.}$$

この滑らかな関数 K は上の最後の式できまるから座標のとり方によらない．K は M 上の滑らかな関数である．この K を接続 φ の**曲率**とよぶ．

第 1 構造方程式　座標近傍 U をとり，$\pi^{-1}(U)$ 上で考える．点 $e^{i\theta}c(m)$ で

$$\omega_1 = (\cos\theta)\tilde{\omega}_1 + (\sin\theta)\tilde{\omega}_2, \qquad \omega_2 = -(\sin\theta)\tilde{\omega}_1 + (\cos\theta)\tilde{\omega}_2$$

であった．さて，U 上のある滑らかな関数 a_i に対して

$$d\tilde{\omega}_i = d(\pi^*\omega_i') = \pi^*(d\omega_i') = \pi^*(a_i\,\mathrm{vol}) = (a_i\circ\pi)\omega_1\wedge\omega_2$$

であるから，$\tilde{a}_i = a_i\circ\pi$ とおいて

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= -(\sin\theta)d\theta\wedge\tilde{\omega}_1 + (\cos\theta)\tilde{a}_1\omega_1\wedge\omega_2 + \cos\theta d\theta\wedge\tilde{\omega}_2 + (\sin\theta)\tilde{a}_2\omega_1\wedge\omega_2 \\ &= d\theta\wedge\omega_2 + (\tilde{a}_1\cos\theta + \tilde{a}_2\sin\theta)\omega_1\wedge\omega_2. \end{aligned}$$

もし，$\mathcal{H}$ が $\pi^{-1}(U)$ 上の特別な接続 $\mathcal{H}_1$ であるならば，$\varphi_1 = d\theta$ だからこの特別な接続に対しては $\pi^{-1}(U)$ 上のある滑らかな関数 b_1 に対して

$$(*) \qquad d\omega_1 = \varphi_1\wedge\omega_2 + b_1\omega_1\wedge\omega_2$$

となる．同様に

$$d\omega_2 = -\varphi_1\wedge\omega_1 + b_2\omega_1\wedge\omega_2.$$

任意の接続形式 φ に対しては，U 上のある滑らかな 1-形式 $\tau = c_1\omega_1' + c_2\omega_2'$ に対して $\varphi_1 - \varphi = \pi^*\tau$ であり，また $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ は各点で ω_1, ω_2 と同じ空間を張っているから，$\pi^{-1}(U)$ 上のある滑らかな関数 f_1, f_2 に対して

$$\varphi_1 - \varphi = \pi^*(c_1\omega_1' + c_2\omega_2') = (c_1\circ\pi)\tilde{\omega}_1 + (c_2\circ\pi)\tilde{\omega}_2 = f_1\omega_1 + f_2\omega_2.$$

したがって

$$\varphi_1 = \varphi + f_1\omega_1 + f_2\omega_2.$$

これを，(*)に代入して

$$d\omega_1 = \varphi\wedge\omega_2 + f_1\omega_1\wedge\omega_2 + b_1\omega_1\wedge\omega_2 = \varphi\wedge\omega_2 + (f_1 + b_1)\omega_1\wedge\omega_2.$$

これと $d\omega_2$ に対する同様の式を合わせると，次の第 1 構造方程式が得られる．

$$\boxed{\begin{aligned} d\omega_1 &= \varphi\wedge\omega_2 + h_1\omega_1\wedge\omega_2 \\ d\omega_2 &= -\varphi\wedge\omega_1 + h_2\omega_1\wedge\omega_2 \end{aligned}}$$

ここで h_1, h_2 は $S(M)$ 上の滑らかな関数である．この方程式は座標近傍上で導かれたが，座標には依存していないので，大域的に成り立つ．

$S(M)$ 上の接続 φ を適当に選ぶことによって，基底 $\{\varphi\wedge\omega_1, \varphi\wedge\omega_2, \omega_1\wedge\omega_2\}$ に関する $d\omega_i$ の係数はかなり自由にとりうるように思えるが，事実はそうでない．実際，$d\omega_1$ は $\varphi\wedge\omega_1$ 方向の成分を決してもたないし，$d\omega_2$ は $\varphi\wedge\omega_2$ 方向の成分を決してもたない．さらに，$d\omega_1$ と $d\omega_2$ は，それぞれ $\varphi\wedge\omega_2$ と $\varphi\wedge\omega_1$ の方向への成分は常に $+1$ と -1 である．

$S(M)$ 上の接続を適当に選ぶことによって，第1構造方程式を簡単にすることができるか，という問は自然である．特に，$h_1\equiv 0$ かつ $h_2\equiv 0$ となるように φ をとれるであろうか．答は肯定的である．さらに，そのとり方は一意である．

定理　M を向きのついた2次元リーマン多様体とする．このとき，$S(M)$ 上の接続 ψ が一意的に存在して

$$\boxed{\begin{aligned} d\omega_1 &= \psi\wedge\omega_2 \\ d\omega_2 &= -\psi\wedge\omega_1 \end{aligned}}$$

となる．この接続を**リーマン接続**とよぶ．

証明　φ を $S(M)$ 上の任意の接続とする．ψ をもう1つの任意の $S(M)$ 上の接続とすると，前と同じように，ある関数 x_1, x_2 に対して

$$\varphi-\psi = x_1\omega_1 + x_2\omega_2.$$

φ に関して解いて，φ に対する第1構造方程式に代入すると

$$d\omega_1 = \psi\wedge\omega_2 + (h_1+x_1)\omega_1\wedge\omega_2, \qquad d\omega_2 = -\psi\wedge\omega_1 + (h_2+x_2)\omega_1\wedge\omega_2$$

を得るから

$$d\omega_1 = \psi\wedge\omega_2, \qquad d\omega_2 = -\psi\wedge\omega_1$$

となるのは $x_1=-h_1$，$x_2=-h_2$ のときである．またそのとき ψ は接続である．これで，存在も一意性も証明された．▓

カルタンの構造方程式は，ベクトル場の言葉で双対的に表わすことができる．V, E_1, E_2 を $S(M)$ 上の滑らかなベクトル場で，$\varphi, \omega_1, \omega_2$ に対する双対基底をなすものとする．このとき，$\varphi(E_1)=\varphi(E_2)=0$ だから E_1 と E_2 は各点で垂直的である．

$$d\pi(E_1(m, v)) = \omega_1(E_1)v + \omega_2(E_1)(iv) = v$$

であるから，$E_1(m, v)$ は $d\pi$ による像が v であるただ1つの (m, v) における水平なベクトルである．同様に $d\pi(E_2(m, v))=iv$．結局，構造方程式は

$$\boxed{\begin{array}{ll}[V,\ E_1]=E_2, & [V,\ E_2]=-E_1 \\ [E_1,\ E_2]=(K\circ\pi)V-h_1E_1-h_2E_2 & \end{array}}$$

となる．もし，$\varphi=\psi$ すなわちリーマン接続の 1-形式ならば，上の式は

$$\boxed{[E_1,\ E_2]=(K\circ\pi)V}$$

となる．これらの式を確かめるには，τ を集合 $\{\varphi,\ \omega_1,\ \omega_2\}$ の元とし，V_1 と V_2 を集合 $\{V,\ E_1,\ E_2\}$ の元として，9 個の下の式を用いればよい．

$$d\tau(V_1,\ V_2)=\tfrac{1}{2}\{V_1\tau(V_2)-V_2\tau(V_1)-\tau([V_1,\ V_2])\}$$

注意 K が定数ならば，上の式は $\{V,\ E_1,\ E_2\}$ が有限次元のリー環を張ることを示している．

今後，向きづけられた 2 次元リーマン多様体 M に対して，接続はリーマン接続を選んでおき，K はその接続に対する曲率関数とする．

7.3 曲率の解釈

M の曲率 K は，M の中の小さな閉曲線に沿ってベクトルを平行移動して得られる回転を測っているということを示そう．直観的には，次のようにいえる．$S(M)$ 上のベクトル場 E_1, E_2, V を考えたが，これに対してリーマン接続の場合は

$$[E_1,\ E_2]=(K\circ\pi)V$$

が成り立った．ところが，$[E_1,\ E_2](m,\ v)$ はちょうど E_1 と E_2 の積分曲線に沿ってパラメータの距離で $\sqrt{s}$ だけ前に行き，ついで，逆向きに帰ってきた曲線の接ベクトルである(図 7.7)(5.3 節を見よ)．

この図形を M に射影すると，「ほとんど」閉じた四角の形をした図形が得られる．すなわち，得られた m を通る曲線は m での接ベクトルが 0 である．

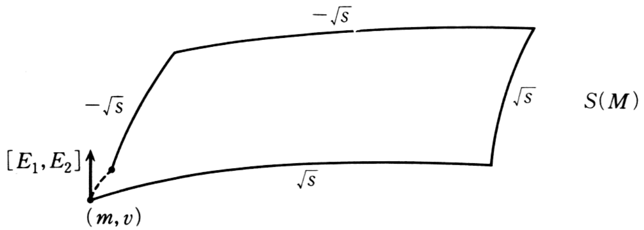


図 7.7

なぜなら，そのベクトルは垂直なベクトル $[E_1, E_2](m, v)$ の射影になっている(図 7.8 を見よ).

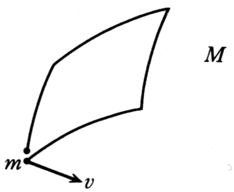


図 7.8

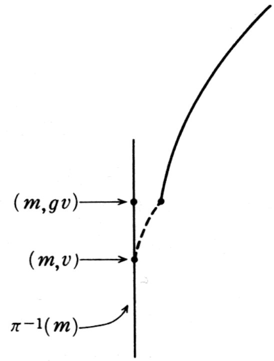


図 7.9

さて，$S(M)$ の中の積分曲線は M の曲線の水平もち上げである．すなわちこれらの曲線は v を M の中の曲線に沿って平行移動して得られる．(m, v) を通る曲線の終点——図 7.9 の点線——は，本質的には S^1 の元だけ，すなわち回転 $g=e^{i\theta}$ だけの差がある．この回転は，v を四角の形の曲線に沿って M において平行移動したベクトルに移す.

M の矩形の面積は大体 $\sqrt{s}\cdot\sqrt{s}=s$ だから，回転の角を矩形の面積で割ったものの $s\to 0$ のときの極限は，V の係数すなわち $K(m)$ に等しい.

もう少し一般性をもたせて正確に述べると，いまの議論は次のようになる.

定理 1　M を向きのついた 2 次元リーマン多様体とする．$\langle s\rangle$ を R^2 の中の向きのついた 2-単体として，h: $[s]\to M$ を $[s]$ の近傍から M への滑らかな写像に拡張できる写像とする．h を $\partial\langle s\rangle$ に制限して得られる区分的に滑らかな M の中の C^∞-閉曲線を α とする．このとき，閉曲線 α に沿った平行移動によって得られる回転は

$$\exp\left[i\int_{\langle s\rangle} h^*(K\,\mathrm{vol})\right]$$

であり，回転角は $\int_{\langle s\rangle} h^*(K\,\mathrm{vol})$ である.

注意　この定理は，上の議論をも含んでいる．$\langle s\rangle$ が 0 に縮み，$h(\langle s\rangle)$ が m に縮むときの $\int_{\langle s\rangle} h^*(K\,\mathrm{vol})\Big/\int_{\langle s\rangle} h^*(\mathrm{vol})$ の極限をとれば，$K(m)$ を得るからである．しかし，

定理はこれ以上のことをいっている．たとえば，$h([s])$ 上で $K>0$ でも，α に沿って平行移動させた結果，回転がない場合もありうる．すなわち，回転角の総和 $\int_{\langle s\rangle} h^*(K\,\mathrm{vol})$ が 2π の整数倍になっているときである．

定理 1 の証明　ある頂点 $v_0,\ v_1,\ v_2$ に対して$\langle s\rangle=\langle v_0,\ v_1,\ v_2\rangle$とし，$w_0\in T(M,\ h(v_0))$ を単位ベクトルとする．v_1 を通る $[s]$ の中の直線によって，$[s]$ はおおわれる．これらの h による像は，$h([s])$ をおおう M の中の曲線である．これらのおのおのの曲線を，$(h(v_1),\ w_1)\in S(M)$ を通るように，$S(M)$ の中に水平にもち上げた曲線に写す写像を $\tilde{h}\colon [s]\to S(M)$ とする．ただし，w_1 は w_0 を曲線 $\alpha|_{\langle v_0,v_1\rangle}$ に沿って $h(v_1)$ まで平行移動したものとする(図 7.10)．

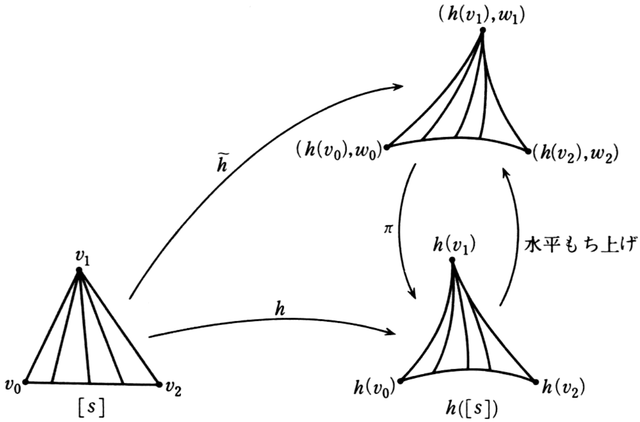


図 7.10

つくり方から $\pi\circ\tilde{h}=h$．さらに，$\tilde{h}$ は $[s]$ の近傍から $S(M)$ の中への滑らかな写像に拡張できる．これは，局所座標を使って確かめることができる．計算は省略する．

さて

$$\int_{\langle s\rangle} h^*(K\,\mathrm{vol})=\int_{\langle s\rangle}(\pi\circ\tilde{h})^*(K\,\mathrm{vol})=\int_{\langle s\rangle}\tilde{h}^*[\pi^*(K\,\mathrm{vol})]$$

$$=\int_{\langle s\rangle}\tilde{h}^*[(K\circ\pi)\omega_1\wedge\omega_2]$$

$$=-\int_{\langle s\rangle}\tilde{h}^*(d\varphi)\qquad\text{(第 2 構造方程式)}$$

$$=-\int_{\langle s\rangle}d(\tilde{h}^*\varphi)=-\int_{\partial\langle s\rangle}\tilde{h}^*\varphi\qquad\text{(ストークスの定理)}$$

$$=-\int_{\partial\langle s\rangle}\varphi\Big(d\tilde{h}\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big)dt=-\int_{\partial\langle s\rangle}\varphi\Big(d\tilde{\beta}\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big)dt.$$

ここで $\tilde{\beta}=\tilde{h}|_{\partial\langle s\rangle}$. $\tilde{\alpha}$ を, $\tilde{h}(v_0)=(\alpha(v_0),\ \omega_0)$ を通る α の水平もち上げとする. $\tilde{\beta}|_{\langle v_0,v_1\rangle}=\tilde{h}|_{\langle v_0,v_1\rangle}$ と $\tilde{\beta}|_{\langle v_1,v_2\rangle}=\tilde{h}|_{\langle v_1,v_2\rangle}$ は, $\tilde{h}$ のつくり方から水平であるから,

$$\tilde{\beta}|_{\langle v_0,v_1\rangle}=\tilde{\alpha}|_{\langle v_0,v_1\rangle} \quad かつ \quad \tilde{\beta}|_{\langle v_1,v_2\rangle}=\tilde{\alpha}|_{\langle v_1,v_2\rangle}.$$

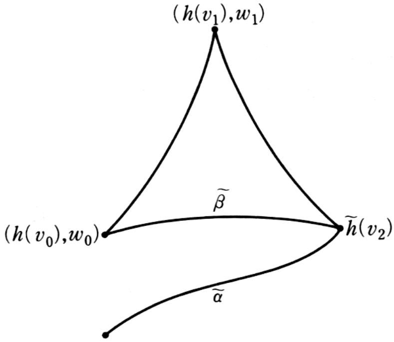


図 7.11

7.1 節の補題 2 により, 関数 f: $\langle v_2,\ v_0\rangle\to \boldsymbol{R}$ が存在して, $f(v_2)=0$, かつ

$$\tilde{\beta}(t)=e^{if(t)}\tilde{\alpha}(t).$$

ところが, $\tilde{\alpha}$ は α の水平もち上げだから, $\tilde{\alpha}(v_0)$ は w_0 を α に沿って平行移動したものである. 一方, $\tilde{\beta}(v_0)=w_0$. したがって, $e^{if(v_0)}$ はちょうど w_0 を α に沿って平行移動させたものを w_0 に写す回転である. 7.1 節の補題 2 の 2 番目の命題から, $t\in\langle v_2,\ v_0\rangle$ に対して

$$\varphi\Big(d\tilde{\beta}\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big)=\frac{df}{dt}.$$

さらに, β は $\langle v_0,\ v_1\rangle$ と $\langle v_1,\ v_2\rangle$ の上で水平だから, その上で $\varphi(d\tilde{\beta}(d/dt))=0$. したがって, $\partial\langle s\rangle=\langle v_0,\ v_1\rangle+\langle v_1,\ v_2\rangle+\langle v_2,\ v_0\rangle$ より

$$\begin{aligned}\int_{\langle s\rangle}h^*(K\,\mathrm{vol})&=-\int_{\langle v_2,v_0\rangle}\varphi\Big(d\tilde{\beta}\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big)dt\\&=-\int_{\langle v_2,v_0\rangle}\frac{df}{dt}dt=-f(v_0)\\&=(w_0\ と\ w_0\ を\ \alpha\ に沿って平行移動した\\&\qquad ベクトルとの回転角).\end{aligned}$$ ▨

定義 α: $[a,\ b]\to M$ を滑らかな曲線とする. α の**長さ** $l(\alpha)$ とは, 実数

$$l(\alpha)=\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|dt$$

のことである．α に沿った弧長とは

$$s(t)=\int_a^t \|\dot{\alpha}(\tau)\|d\tau$$

で与えられる関数 s: $[a, b]\to \boldsymbol{R}$ のことである．

注意　$t\to\|\dot{\alpha}(t)\|$ が連続だから，l と s は定義される．$t\to\|\dot{\alpha}(t)\|$ が $\dot{\alpha}(t)=0$ のところで必ずしも微分可能ではないから，関数 s は C^1 級だが必ずしも滑らかではない．しかし，任意の t に対して $\|\dot{\alpha}(t)\|\neq 0$ なら s は滑らかで単調増加である．

定義　曲線 α: $[a, b]\to M$ は，すべての $t\in[a, b]$ に対して $\|\dot{\alpha}(t)\|=1$ が成り立つとき弧長でパラメータづけされているという．この場合，任意の $t\in[a, b]$ に対して $s(t)=t-a$.

すべての $t\in[a, b]$ に対して $\|\dot{\alpha}(t)\|\neq 0$ である任意の曲線 α: $[a, b]\to M$ が与えられると，$\alpha_1=\alpha\circ s^{-1}$ とおくことによって，弧長でパラメータづけされた新しい曲線 α_1: $[0, l(\alpha)]\to M$ が得られる．このとき，$\mathrm{Im}\,\alpha_1=\mathrm{Im}\,\alpha$，かつ $l(\alpha_1)=l(\alpha)$.

注意　区分的 C^∞-曲線に対しても，$\|\dot{\alpha}(t)\|$ は有限個の点を除いて定義されるから，弧長の概念が定義される．

定義　弧長でパラメータづけされた滑らかな曲線 α: $[a, b]\to M$ が与えられると

$$\alpha'(t)=(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))\qquad(t\in[a, b])$$

によって，滑らかな曲線 α': $[a, b]\to S(M)$ が定義される．α' が水平，すなわち α' が $(\alpha(a), \dot{\alpha}(a))\in S(M)$ を通る α の水平もち上げになっているとき，α を**測地線**とよぶ．α が測地線なら，$\dot{\alpha}(0)$ を α に沿って $\alpha(t)$ まで平行移動させたものがちょうど $\dot{\alpha}(t)$ になっている．すなわち，α の接線は平行移動でやはり α の接線に移る．α は曲面上の「直線」である．

曲線 α がどれほど「まっすぐ」でないかを測るには，α' がどれだけ水平からずれているかを測ればよい．そこで，α を弧長でパラメータづけされているとしよう．このとき，α': $[a, b]\to S(M)$ は $S(M)$ の中の曲線である．

定義　α の $t\in[a, b]$ における**測地的曲率** $k_\alpha(t)$ とは，ϕ をリーマン接続の

1-形式として $\phi(d\alpha'(d/dt))$ のことをいう.

記号 すべての $t \in [a, b]$ に対して $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ である区分的に滑らかな曲線 α: $[a, b] \to M$ に対して, $\tau(\alpha) = \int_0^{l(\alpha)} k_{\alpha_1}(t)dt$ とする. ただし, α_1 は α から弧長でパラメータづけして得られる新しい曲線とする.

M が滑らかに三角形分割された多様体ならば, τ は(その三角形分割に関して) 1-コチェインと考えることができる.

補題 (2-単体に対するガウス-ボンネの定理) M を向きづけられた2次元リーマン多様体とする. $\langle s \rangle$ を R^2 の中の向きのついた2-単体とし, h: $[s] \to M$ を $[s]$ の近傍から M への滑らかな非退化写像に拡張できる写像とする. α を, h を $\partial\langle s \rangle$ に制限して得られる区分的 C^∞-閉曲線とする. このとき

$$\int_{\langle s \rangle} h^* K(\mathrm{vol}) = -\tau(\alpha) + \sum (h[s] \text{ の内角}) - \pi.$$

証明 上の定理1より, 閉曲線 α に沿って平行移動して得られる回転は $\exp\left[i\int_{\langle s \rangle} h^*(K\,\mathrm{vol})\right]$ である. α を, 3つの滑らかな部分 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ に分けたとする. つまり, α_i: $[a_i, a_{i+1}] \to M$, $a_0 = a$, $a_3 = b$ で $\tau(\alpha) = \sum \tau(\alpha_i)$. 7.1節の補題2より, $e^{i\tau(\alpha_i)}$ が $\dot{\alpha}_i(a_i)$ を平行移動したものと $\dot{\alpha}_i(a_{i+1})$ との回転である. したがって, M での図を考えて(図7.12), 閉曲線 α に沿って平行移動すれば $\exp i\left[-\tau(\alpha) - \sum(\text{外角})\right]$ が得られる. そこで, 対数をとれば

$$\int_{\langle s \rangle} h^* K(\mathrm{vol}) = -\tau(\alpha) - \sum (\text{外角}) + 2\pi l$$

となる. ここで l は整数である.

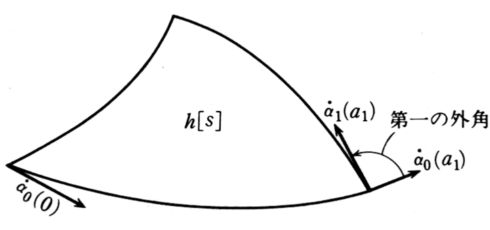


図 7.12

$l=1$ を示すために連続性の議論を使う. ρ_0 を $h[s]$ の近傍上の平坦なリーマン計量とする(すなわち, R^2 から h によって入れたもの). このとき, $K=0$,

$\tau(\alpha)=0$, (外角の和)$=2\pi$ である．したがって，平坦なリーマン計量に対しては $l=1$ である．次に，ρ を与えられたリーマン計量としよう．$t\in[0,1]$ に対して $\rho_t=t\rho_0+(1-t)\rho$ とおけば，ρ_t はリーマン計量の族を与える．K_t, $\tau_t(\alpha)$, (外角)$_t$ をそれぞれ ρ_t に対する曲率，長さ，外角とする．これらは，t に関して連続な関数である．したがって，l も t に関して連続な関数である．l は任意の t に対して整数であって，$t=0$ のとき $l=1$ だから，任意の t に対して $l=1$ である(この結果は，小さな三角形について $l=1$ を確かめて重心細分をとることによっても得られる)．(内角)+(外角)$=\pi$ だから補題が証明された． ▨

定義 M を，向きづけられた，連結な，滑らかに三角形分割された2次元多様体とする．M の中の各2-単体 s に対して，$\langle s\rangle$ で M の向きと同調する向きを表わす．すなわち h: $[K]\to M$ を三角形分割とし，ω を M の向きを与える M 上の2-形式とすると，s に2-形式 $h_s{}^*\omega$ で与えられる向きをつける．

$$c=\sum_s\langle s\rangle$$

とすると，c はサイクルになる．これを M の**基本サイクル**とよぶ．M 上の任意の2-形式 μ に対して，μ の M 上の積分が次式によって定義される．

$$\int_M\mu=\int_c h^*\mu$$

問題 c がサイクルであることを証明せよ．

注意 上の積分は三角形分割を用いなくても定義できる．M を向きづけられた，コンパクト n 次元多様体とする．M 上の単位の分割を $\{U_j, f_j\}$ とする．ただし $\{U_j\}$ は座標近傍による M の有限被覆とする．このとき，n-形式の積分が，各 U_j 上で座標系によって n-形式を R^n 上に引き戻すことによって定義される．そこで，μ の M 上での積分が

$$\int_M\mu=\sum_j\int_{U_j}f_j\mu$$

と定義される．これは，単位の分割のとり方によらない．なぜなら，$\{V_k, g_k\}$ をもう1つの単位の分割とすると

$$\sum_j\int_{U_j}f_j\mu=\sum_{j,k}\int_{U_j\cap V_k}f_jg_k\mu=\sum_k\int_{V_k}g_k\mu.$$

定理 2 (ガウス-ボンネの定理) M を向きづけられた，連結な，滑らかに三角形分割された2次元リーマン多様体とする．このとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,\mathrm{vol}=\chi(M)=\beta_0-\beta_1+\beta_2$$

($\chi(M)$ は M のオイラー数)．

証明　M の任意の1-単体 t は，ちょうど2つの M の2-単体の辺になっている．なぜなら，任意の点 $m\in(t)$ に対して陰関数の定理により m を含む座標近傍をなす円板 U が存在して，$(t)\cap U$ が R^2 の中の直線に写される．U を十分小さくとれば，t は U をちょうど2つの部分に分ける．この2つの部分は異なる2単体に含まれなければならない．また，開単体は互いに交わらないから t を辺とする2-単体はこれ以外にはない．

各2-単体は辺として3つの1-単体をもつから，結局，M の1-単体全部の数は $n_1=3n_2/2$ で与えられる．ただし，n_2 は M の2-単体の数である．n_0 で M の頂点の数を表わせば，オイラー数(6.1節)は

$$\chi=n_0-n_1+n_2=n_0-(3n_2/2)+n_2=n_0-(n_2/2)$$

で与えられる．ここで，前の補題を適用すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_M K\,\mathrm{vol}&=\frac{1}{2\pi}\int_c h^*(K\,\mathrm{vol})\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_s\int_{\langle s\rangle}h^*(K\mathrm{vol})\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_s\Big(-\tau(\partial\langle s\rangle)+\sum(\text{内角}\,h[s])-\pi\Big)\\&=\frac{1}{2\pi}\Big(-\tau(\partial c)+\sum_s\big(\sum\text{内角}\,h[s]\big)-n_2\pi\Big).\end{aligned}$$

ところが，$\partial c=0$，かつ $\sum_s\big(\sum(h[s]\ \text{の内角})\big)$ は v を頂点にもつすべての2-単体の v での内角の和を，M のすべての頂点にわたって和をとったものに等しい．$\mathrm{St}(v)$ に含まれる座標近傍 V を考えれば，各 v に対して v での内角の和はちょうど 2π に等しいことがわかる(図7.13)．したがって

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K(\mathrm{vol})=\frac{1}{2\pi}(2\pi n_0-n_2\pi)=n_0-\frac{n_2}{2}=\chi(M).\quad ▓$$

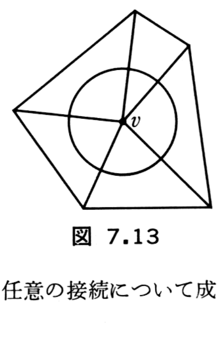


図 7.13

注意　この定理は $S(M)$ 上の任意の接続について成り立つ．証明には，ただ第2構造方程式を用いただけである．

系 1　M を球面 S^2 と同相な任意の 2 次元リーマン多様体とすると

$$\int_M K\,\mathrm{vol}=4\pi.$$

系 2　M をトーラス $S^1\times S^1$ と同相な任意のリーマン多様体とすると

$$\int_M K\,\mathrm{vol}=0.$$

系 3　M を定理と同じものとする．M 上に決して 0 にならない滑らかなベクトル場が存在するならば，$\chi(M)=0$．特に，球面上には 0 にならないベクトル場は存在しない．

系 3 の証明　X をそのようなベクトル場とする．$Y=X/\|X\|$ とおくと，Y は滑らかで，任意の $m\in M$ に対して $\|Y(m)\|=1$ だから，Y は $M\to S(M)$ の滑らかな写像である．$S(M)$ 上で

$$d\psi=-(K\circ\pi)\omega_1\wedge\omega_2=-\pi^*(K\,\mathrm{vol})$$

であるから，$\pi\circ Y=i_M$ に注意すると

$$\begin{aligned}d(Y^*\psi)&=Y^*(d\psi)=-Y^*\circ\pi^*(K\,\mathrm{vol})\\&=-(\pi\circ Y)^*(K\,\mathrm{vol})=-K\,\mathrm{vol}.\end{aligned}$$

したがって，$K\,\mathrm{vol}$ は完全で，

$$2\pi\chi=\int_c K\,\mathrm{vol}=-\int_c d(Y^*\psi)=-\int_{\partial c}Y^*\psi=0.\quad ▮$$

7.4　測地座標系

M を向きのついた 2 次元リーマン多様体とし，$S(M)$ 上のベクトル場 E_1 を考える．U_t をベクトル場 E_1 によって生成される $S(M)$ 上の 1 パラメータ局所変換群とする．このとき，各 $m_0\in M$ と $z\in\pi^{-1}(m_0)$ に対して，$\varepsilon>0$ と，z を含む $S(M)$ の中の開集合 W_z が存在して，$(t,w)\to U_t(w)$ によって与えられる写像 $[-\varepsilon,\varepsilon]\times W_z\to S(M)$ が滑らかである．$\pi^{-1}(m_0)\cong S^1$ はコンパクトだから，$\pi^{-1}(m_0)$ はそのような集合 W_z の有限個でおおわれる．それぞれの W_z に対する ε の最小値を改めて ε とすると，写像 μ: $[0,\varepsilon]\times S^1\to S(M)$ が

$$\mu(t,g)=U_t(m_0,gv_0)\qquad (v_0\in T(M,m_0),\ \|v_0\|=1 \text{ を固定しておく})$$

によって与えられ，これは定義可能で滑らかである．各 $g\in S^1$ に対して $S(M)$ の中の曲線 $t\to\mu(t,g)$ は接ベクトルを E_1 とする水平な曲線だから，M の中の曲線 $t\to\pi\circ\mu(t,g)$ は m_0 から出発する測地線で，その m_0 での接ベクト

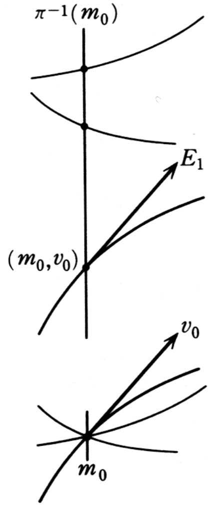


図 7.14

ルは $d\pi(E_1(m_0, gv_0))=gv_0$ である(図 7.14 を見よ).

D_ε を, R^2 の中の原点を中心とする半径 ε の開円板とする. そして, P: $[0, \varepsilon]\times S^1\to D_\varepsilon$ (極写像)を

$$P(t, g)=tg$$

によって与える. このとき, P は滑らかな写像である. また, P の $(0, \varepsilon)\times S^1$ への制限は単射で, $(0, \varepsilon)\times S^1$ を $D_\varepsilon-\{0\}$ の上へ写す. 任意の $g\in S^1$ に対して $\pi\circ\mu(0, g)=m_0$ だから, 写像 G: $D_\varepsilon\to M$ が $G=\pi\circ\mu\circ P^{-1}$ によって定義される.

$$\begin{array}{ccc} [0, \varepsilon]\times S^1 & \xrightarrow{\mu} & S(M) \\ \downarrow P & & \downarrow \pi \\ D_\varepsilon & \xrightarrow{G} & M \end{array}$$

問題 写像 G が滑らかであることを確かめよ($G(0)=m_0$ であることと, G は D_ε の半径の直線を m_0 を通る測地線に写すこととに注意せよ).

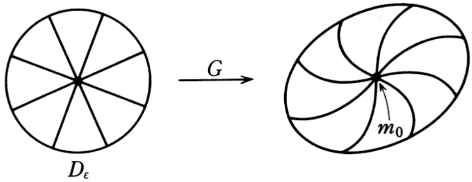


図 7.15

定義 写像 $G: D_\varepsilon \to M$ を m_0 の回りの**極座標系**，あるいは，**測地座標系**とよぶ.

$\partial/\partial r$, $\partial/\partial\theta$ を $(0, \varepsilon)\times S^1$ 上の自然なベクトル場とする．このとき，$dP(\partial/\partial r)$ と $dP(\partial/\partial\theta)$ は $D_\varepsilon-\{0\}$ の中の極座標曲線への接ベクトルである．$dP(\partial/\partial\theta)|_0=0$ とおくことにより，$dP(\partial/\partial\theta)$ は D_ε 上に滑らかに拡張できる．次の補題はこの直交するベクトル場 $dP(\partial/\partial r)$ と $dP(\partial/\partial\theta)$ が測地座標系によって直交するベクトル場に写されること，すなわち，r=定数 と θ=定数 の直交する曲線が測地座標系によって M の中の直交する曲線に写されることを示している.

ガウスの補題 $\langle dG\circ dP(\partial/\partial r),\ dG\circ dP(\partial/\partial\theta)\rangle=0.$

証明 $dG\circ dP=d(G\circ P)=d(\pi\circ\mu)=d\pi\circ d\mu.$ さらに $d\mu(\partial/\partial r)=E_1$ だから，(m, v) を μ の像からとると

$$d\pi\left[d\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\bigg|_{(m,v)}\right]=d\pi(E_1(m, v))=v.$$

したがって

$$\left\langle dG\circ dP\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), dG\circ dP\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\rangle=\left\langle d\pi\circ d\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), d\pi\circ d\mu\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\rangle$$
$$=\omega_1\left(d\mu\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right)=(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

これが 0 であることを見るために

$$d(\mu^*\omega_1)=\mu^*(d\omega_1)=\mu^*(\psi\wedge\omega_2) \qquad \text{(第 1 構造方程式による)}$$
$$=\mu^*\psi\wedge\mu^*\omega_2.$$

を考えると

$$d(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{2}\left\{(\mu^*\psi)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-(\mu^*\psi)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\psi\left(d\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\omega_2\left(d\mu\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right)-\psi\left(d\mu\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right)\omega_2\left(d\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\right\}.$$

ところが，$d\mu(\partial/\partial r)=E_1$ で E_1 は水平だから，$\psi(d\mu(\partial/\partial r))=0$ となり，また $\omega_2(d\mu(\partial/\partial r))=0$. したがって

$$0=d(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]-(\mu^*\omega_1)\left(\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right]\right)\right\}.$$

また

$$(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)=\omega_1\left(d\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)=\omega_1(E_1)\equiv 1$$

だから第2項は0．さらに，偏微分の順序交換の等式より $[(\partial/\partial r), (\partial/\partial\theta)]=0$ だから，第3項も0．したがって

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\equiv 0$$

となり，$(\mu^*\omega_1)(\partial/\partial\theta)$ は r に無関係である．すなわち

$$\left\langle dG\circ dP\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), dG\circ dP\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\rangle$$

は r に無関係．ところが，$r\to 0$ とすると $dP(\partial/\partial\theta)\to 0$ だから，上の内積 → 0．これは r に無関係だから恒等的に0である．▨

ガウスの補題によれば，$dG(dP(\partial/\partial\theta))$ は測地座標系での半径方向の測地線に対して常に直交している．

次に，半径方向の測地線に沿って動いたときに $dG(dP(\partial/\partial\theta))$ の長さがどう変化するかを考える．$\omega_1(d\mu(\partial/\partial\theta))$ と $\omega_2(d\mu(\partial/\partial\theta))$ は $d\pi(d\mu(\partial/\partial\theta))$ の正規直交基底に関する成分であって，また，ガウスの補題の証明より $\omega_1(d\mu(\partial/\partial\theta))=(\mu^*\omega_1)(\partial/\partial\theta)=0$ だから，$(\mu^*\omega_2)(\partial/\partial\theta)=\omega_2(d\mu(\partial/\partial\theta))$ は少なくとも符号を除いて $d\pi\circ d\mu(\partial/\partial\theta)=dG\circ dP(\partial/\partial\theta)$ の長さに等しい．

第1構造方程式より

$$d(\mu^*\omega_2)=\mu^*(d\omega_2)=-\mu^*(\phi\wedge\omega_1)=-\mu^*\phi\wedge\mu^*\omega_1$$

であるから

$$\begin{aligned}&d(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\&=-\frac{1}{2}\left[(\mu^*\phi)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-(\mu^*\phi)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right].\end{aligned}$$

ところが，ガウスの補題の証明によって，$(\mu^*\omega_1)(\partial/\partial\theta)=0$，かつ

$$(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)=\omega_1\left(d\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)=\omega_1(E_1)\equiv 1$$

であるから

$$d(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{2}(\mu^*\phi)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

一方

$$(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)=\omega_2\left(d\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)=\omega_2(E_1)=0$$

で，$[(\partial/\partial r), (\partial/\partial\theta)]=0$ だから

$$d(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial \theta}\left[(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]-(\mu^*\omega_2)\left(\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right]\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right].$$

したがって

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r}\left[(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]=(\mu^*\psi)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right).}$$

第 2 構造方程式を用いると

$$d(\mu^*\psi)=\mu^*(d\psi)=\mu^*(-(K\circ\pi)\omega_1\wedge\omega_2)=-(K\circ\pi\circ\mu)\mu^*\omega_1\wedge\mu^*\omega_2$$

であるから，前と同様に

$$d(\mu^*\psi)\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}(K\circ\pi\circ\mu)\left[(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)-(\mu^*\omega_1)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]$$
$$=-\frac{1}{2}(K\circ G\circ P)(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right).$$

また，

$$(\mu^*\psi)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)=\psi\left(d\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)=\psi(E_1)=0 \qquad \text{かつ} \qquad \left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right]=0$$

であるから

$$d(\mu^*\psi)\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(\mu^*\psi)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial \theta}\left[(\mu^*\psi)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]-(\mu^*\psi)\left(\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right]\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[(\mu^*\psi)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]$$

となって

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r}\left[(\mu^*\psi)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]=-(K\circ G\circ P)(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right).}$$

最初に得られた方程式を微分して，上の方程式に代入すれば

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]+(K\circ G\circ P)\left[(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]=0$$

を得る．さらに

$$(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\bigg|_{r=0}=\omega_2\left(d\mu\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right)\bigg|_{r=0}=\omega_2(V)=0$$

であり，最初に得られた方程式から

$$\frac{d}{dr}\left[(\mu^*\omega_2)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\bigg|_{r=0}=(\mu^*\psi)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\bigg|_{r=0}=\psi\left(d\mu\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right)\bigg|_{r=0}=\psi(V)=1.$$

特に，（少なくとも r の小さな値に対して）$(\mu^*\omega_2)(\partial/\partial\theta)\geq 0$ だから，$(\mu^*\omega_2)(\partial/\partial\theta)$ は本当に $dG\circ dP(\partial/\partial\theta)$ の長さに等しい．

結局，次の定理が得られた．

定理 1　$G: D_\varepsilon\to M$ を m_0 の回りの測地座標系とする．$g\in S^1$ に対して，m_0 を通る測地線 $r\to G\circ P(r, g)$ を考える．この測地線上でのベクトル場 $dG\circ dP(\partial/\partial\theta)$ の長さを $f(r)$ とする．このとき，f は，次の微分方程式と初期条件 $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たす．

$$\frac{d^2f}{dr^2}+(K\circ G\circ P)f=0 \qquad \text{（ヤコビの方程式）}$$

注意　K が定数の場合は，この方程式は式できちんと解ける．すなわち
$K>0$　なら　$f(r)=(1/\sqrt{K})\sin(\sqrt{K}r)$，　　$K=0$　なら　$f(r)=r$，
$K<0$　なら　$f(r)=(1/\sqrt{-K})\sinh(\sqrt{-K}r)$．

定理 2　測地線は局所的には最短曲線である．すなわち，α を m_0 から出発する M の中の測地線とすると，ある $\varepsilon>0$ が存在して，m_0 から $\alpha(\varepsilon)$ への M の中の任意の区分的 C^∞-曲線 β に対して，$l(\alpha_{[0,\varepsilon]})\leq l(\beta)$ が成り立つ．

証明　$G: D_\varepsilon\to M$ を m_0 の回りの測地座標系とすると，α は測地線だからある $g_0\in S^1$ に対して

$$\alpha(t)=G\circ P(t, g_0)=G(tg_0) \qquad (0\leq t<\varepsilon).$$

$p': D_\varepsilon-\{0\}\to D_\varepsilon$ を，D_ε の各点を g_0 を通る半径の上へ回転させる写像とする．すなわち，p' は $p'(rg)=rg_0$ で定義される．

$U=G(D_\varepsilon)$ とおくと，U は開集合．p: $U-\{m_0\}\to U$ を U での p' に対応

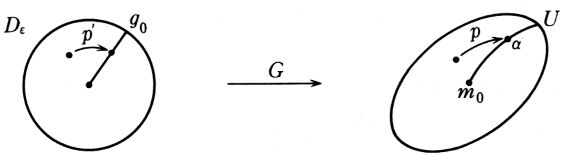


図 7.16

する写像とする．すなわち $p=G\circ p'\circ G^{-1}$．このとき dp: $T(U, m)\to T(U, p(m))$ は長さを減少させる写像である．すなわち

$$\|dp(v)\|\leq\|v\| \qquad (\text{すべての } v\in T(U, m),\ m\in U-\{m_0\} \text{ に対して}).$$

なぜなら，ガウスの補題によって $dG\circ dP(\partial/\partial r)$ と $dG\circ dP(\partial/\partial\theta)$ は $T(U, m)$ の中の直交するベクトルである．さらに

$$\left\|dp\Big(dG\circ dP\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big)\right\|=\left\|dG\Big(dp'\circ dP\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big)\right\|=\left\|dG\circ dP\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big)\right\|$$

$$\left\|dp\Big(dG\circ dP\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\Big)\right\|=\left\|dG\Big(dp'\circ dP\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\Big)\right\|=\left\|dG(0)\right\|=0.$$

したがって，$dp(v)$ の大きさは v を $dG\circ dP(\partial/\partial r)$ へ直交射影したものの大きさに等しく，それは $\|v\|$ に等しいか，より小さい．

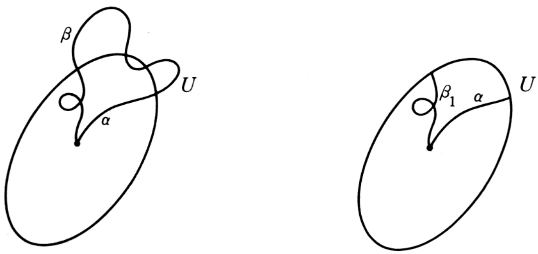


図 7.17

さて，β: $[a, b]\to M$ を m_0 から $\alpha(\varepsilon)$ への任意の区分的 C^∞-曲線とする．

$$c=\inf[t\in[a, b];\ \beta(r)\notin U]$$

とおくと，$\beta(c)\notin U$ だが，$t<c$ なる任意の t に対しては $\beta(t)\in U$．$\beta_1=\beta|_{[a,c]}$ とすると，$l(\beta_1)\leq l(\beta)$．次に，曲線 $p\circ\beta_1$: $[a, c]\to M$ を考えると，dp は長さを減少させるから

$$\|\dot{\overline{p\circ\beta_1}}(t)\|=\|dp(\dot\beta_1(t))\|\leq\|\dot\beta_1(t)\|.$$

したがって

$$l(p\circ\beta_1)\leq l(\beta_1)\leq l(\beta).$$

ところが，Image $p\circ\beta_1$＝Image α で α が 1 対 1 だから，f: $[a, c)\to[0, \varepsilon)$ を $f=\alpha^{-1}\circ p\circ\beta_1$ としたとき，$t\in[a, c)$ に対して $p\circ\beta_1(t)=\alpha\circ f(t)$ が成り立つ．したがって

$$l(\beta)\geq l(p\circ\beta_1)=\int_a^c\|(\dot{\overline{p\circ\beta_1}})(t)\|dt=\int_a^c\|\dot{\overline{\alpha\circ f}}(t)\|dt$$

$$=\int_a^c\|\dot\alpha(f(t))\|\,|f'(t)|dt$$

$$\geq\int_a^c \|\dot{\alpha}(f(t))\| f'(t)dt=\int_0^\varepsilon \|\dot{\alpha}(\tau)\| d\tau = l(\alpha|_{[0,\varepsilon]}).$$ ▮

注意　上の証明は次のことをも示している．$G\colon D_\varepsilon \to M$ を m_0 の回りの測地座標系とし，β を m_0 から始まり測地近傍 $G(D_\varepsilon)$ の外の1点で終る区分的 C^∞-曲線とすると，$l(\beta)\geq\varepsilon$ である．

定理 3　$\rho\colon M\times M\to R$ を

$$\rho(m_1, m_2)=\inf[l(\alpha)\,;\ \alpha \text{ は } m_1 \text{ から始まり } m_2 \text{ に終る } M \text{ の中の区分的 } C^\infty\text{-曲線}]$$

と定義すると，ρ は M 上の距離になり，その距離による M の位相は M の多様体としての位相と等しい．

証明　明らかに，$\rho(m_1, m_2)=\rho(m_2, m_1)$，また

$$\rho(m_1, m_3)\leq\rho(m_1, m_2)+\rho(m_2, m_3)$$

である．なぜなら，任意に与えられた $\varepsilon>0$ に対して，α と β を，それぞれ m_1 から m_2 へ，m_2 から m_3 への曲線で

$$l(\alpha)<\rho(m_1, m_2)+\tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad l(\beta)<\rho(m_2, m_3)+\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

が成り立つものとすると

$$\rho(m_1, m_3)<l(\alpha)+l(\beta)<\rho(m_1, m_2)+\rho(m_2, m_3)+\varepsilon.$$

距離であるためには，あと，$\rho(m_1, m_2)=0 \Leftrightarrow m_1=m_2$ を示せばよい．$m_1\neq m_2$ に対して $G\colon D_\varepsilon\to M$ を m_2 を含まない m_1 の回りの測地座標系とすると，m_1 から m_2 への任意の曲線の長さは少なくとも ε はあるから $\rho(m_1, m_2)\geq\varepsilon$.

M 上の2つの位相は一致する．なぜなら，$m_0\in M$ に対して $\varepsilon_0(m_0)>0$ と m_0 の回りの測地座標系 $G\colon D_{\varepsilon_0(m_0)}\to M$ が存在して，任意の $\varepsilon\leq\varepsilon_0(m_0)$ に対して $G(D_\varepsilon)=B_{m_0}(\varepsilon)$ である． ▮

定理 4　M_1 と M_2 を向きづけられた2次元リーマン多様体とする．$m_1\in M_1$，$m_2\in M_2$ とする．$G_1\colon D_\varepsilon\to M_1$，$G_2\colon D_\varepsilon\to M_2$ をそれぞれ m_1 と m_2 の回りの測地座標系とする．K_i を M_i $(i=1, 2)$ の曲率として，$K_2\circ G_2\circ G_1{}^{-1}=K_1$ が成り立てば，$G_2\circ G_1{}^{-1}$ は等長写像である．

証明　$d(G_2\circ G_1{}^{-1})=dG_2\circ dG_1{}^{-1}$ が各点で等長写像であることをいえばよい．$G_2\circ G_1{}^{-1}$ は半径測地線を半径測地線に写すから，$dG_2\circ dG_1{}^{-1}$ は半径方向の距離は保存する．ガウスの補題によって，$dG_2\circ dG_1{}^{-1}$ は直交性も保存する．したがって，θ 方向の距離が保存されることを確かめればよい．すなわち

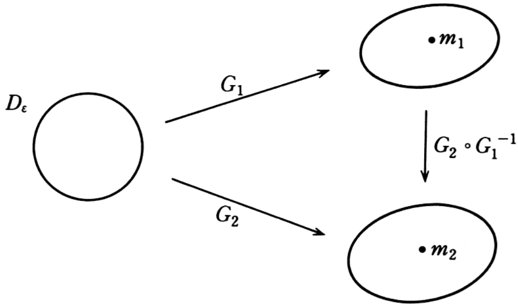


図 7.18

$$\left\| dG_2 \circ dP\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\| = \left\| dG_1 \circ dP\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\|$$

だけを示せばよい．ところが，$g \in S^1$ を固定して

$$f_j(r) = \left\| dG_j \circ dP\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{(r,g)}\right)\right\| \qquad (j=1,\ 2)$$

とおくと，ヤコビ方程式は $f_j(0)=0$，$f_j'(0)=1$ $(j=1,\ 2)$，

$$\frac{d^2 f_j}{dr^2} + (K_j \circ G_j \circ P) f_j = 0$$

を表わしている．解の一意性によって，任意の r に対して $f_1(r)=f_2(r)$，すなわち任意の $(r,\ g) \in (0,\ \varepsilon) \times S^1$ に対して

$$\left\| dG_2 \circ dP\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{(r,g)}\right)\right\| = \left\| dG_1 \circ dP\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{(r,g)}\right)\right\|. \qquad ▮$$

系 M が定曲率 K をもつならば，M の任意の 2 点 m_1, m_2 と，単位ベクトル v_1, v_2 $(v_i \in T(M,\ m_i))$ に対して，m_1 の近傍から m_2 の近傍の上への等長変換 Φ が存在して $\Phi(m_1)=m_2$，$d\Phi(v_1)=v_2$ が成り立つ．

証明 G_i: $D_\varepsilon \to M_i$ を m_i の回りの測地座標系とする $(i=1,\ 2)$．$g \in S^1$ を，$dG_1^{-1}(v_1)$ を $dG_2^{-1}(v_2)$ に写す D_ε の回転とすると，$G_2 \circ g$: $D_\varepsilon \to M$ は m_2 の回りのもう 1 つの測地座標系である．$\Phi = G_2 \circ g \circ G_1^{-1}$ とおけばよい． ▮

注意 $K \equiv 0$ なら，M は局所的に(普通のリーマン構造をもった) R^2 と等長である．しかし，M が大域的に R^2 と等長であるというのは正しくない(たとえば，積としての構造を入れたトーラス $S^1 \times S^1$ を考えよ)．しかし，M が単連結かつ $K \equiv 0$ なら，M は R^2 と等長であることが示される．

注意 定曲率でない場合にも，ヤコビ方程式はある情報を与える．たとえば，ある定数 C に対して，$K \geq C$ と仮定する．このとき，f がヤコビ方程式 $f''+Kf=0$ の解で，f_1 が $f_1''+Cf_1=0$ の解ならば常微分方程式(シュトルム-リューヴィル系)の理論によって

$f \leq f_1$ がわかる．すなわち，M の測地線は定曲率 C の空間よりゆっくりと広がる．いいかえると，m_0 から発する測地線は，定曲率 C の空間より速く集まって戻ってくる．

7.5　等長写像と定曲率空間

M_1, M_2 を滑らかな向きづけられた 2 次元リーマン多様体とし，$f\colon M_1 \to M_2$ を向きを保つ等長写像とする．したがって，f は滑らかで，単射，全射，かつ，滑らかな逆をもつ．さらに，df は接空間上の内積を保つ．

$$\langle df(v_1),\, df(v_2)\rangle = \langle v_1,\, v_2\rangle \qquad (v_1,\, v_2 \in T(M_1,\, m_1)\,;\ m_1 \in M_1).$$

また，τ を M_2 の向きを与える 2–形式とすると，$f^*\tau$ は M_1 の向きを与える．f はリーマン構造と向きを保つから，これらの言葉で定義されるものはすべて保存される．たとえば，曲率，リーマン接続，平行移動が保存される．これらを，次の 5 つの命題として述べよう．

（1）f は

$$\tilde{f}(m_1,\, v) = (f(m_1),\, df(v)) \qquad ((m_1,\, v) \in S(M_1))$$

によって定義される写像 $\tilde{f}\colon S(M_1) \to S(M_2)$ を導く．この写像は，滑らかで，滑らかな逆，すなわち $\tilde{f}^{-1} = \widetilde{f^{-1}}$ をもつ．このとき

$$\pi_2 \circ \tilde{f} = f \circ \pi_1$$

$$\begin{array}{ccc} S(M_1) & \xrightarrow{\tilde{f}} & S(M_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

が成り立つ．さらに，df は各点で向きを保つ等長写像だから，すべての $(m_1,\, v) \in S(M_1)$ と $g \in S^1$ に対して

$$\tilde{f}(g(m_1,\, v)) = g\tilde{f}(m_1,\, v)$$

すなわち，各 $g \in S^1$ に対して $\tilde{f} \circ g = g \circ \tilde{f}$．

（2）$\tilde{f}$ は形式 ω_1, ω_2 と ψ (ψ はリーマン接続の 1–形式)を保つ．なぜなら，$t \in T(S(M_1),\, (m_1,\, v))$ とすると[1)]

$$\begin{aligned} (\tilde{f}^*\omega_1{}^{M_2})(t) &= \omega_1{}^{M_2}(d\tilde{f}(t)) \\ &= \langle df(v),\, d\pi_2(d\tilde{f}(t))\rangle = \langle df(v),\, df(d\pi_1(t))\rangle \\ &= \langle v,\, d\pi_1(t)\rangle = \omega_1{}^{M_1}(t) \end{aligned}$$

すなわち

1)［訳注］以下の式で $\omega_1{}^{M_2}$ は M_2 上の形式 ω_1 を表わす．他も同様．

$$\tilde{f}^*\omega_1{}^{M_2}=\omega_1{}^{M_1}.$$

同様に

$$\tilde{f}^*\omega_2{}^{M_2}=\omega_2{}^{M_1}.$$

接続が保存されることを確かめるために，リーマン接続の一意性を用いる．

$$(\tilde{f}^*\psi^{M_2})(V^{M_1})=\psi^{M_2}(d\tilde{f}(V^{M_1}))=\psi^{M_2}(V^{M_2})=1$$

だから $\tilde{f}^*\psi^{M_2}$ は $S(M_1)$ 上の接続形式であって，各 $g\in S^1$ に対して

$$\begin{aligned} g^*(\tilde{f}^*\psi^{M_2})&=g^*\circ\tilde{f}^*(\psi^{M_2})=(\tilde{f}\circ g)^*(\psi^{M_2})=(g\circ\tilde{f})^*\psi^{M_2} \\ &=\tilde{f}^*(g^*\psi^{M_2})=\tilde{f}^*\psi^{M_2}. \end{aligned}$$

さらに

$$d\omega_1{}^{M_2}=\psi^{M_2}\wedge\omega_2{}^{M_2},\qquad d\omega_2{}^{M_2}=-\psi^{M_2}\wedge\omega_1{}^{M_2}$$

であるから

$$\begin{aligned} d\omega_1{}^{M_1}&=d(\tilde{f}^*\omega_1{}^{M_2})=\tilde{f}^*(d\omega_1{}^{M_2})=(\tilde{f}^*\psi^{M_2})\wedge(\tilde{f}^*\omega_2{}^{M_2})=(\tilde{f}^*\psi^{M_2})\wedge\omega_2{}^{M_1} \\ d\omega_2{}^{M_1}&=d(\tilde{f}^*\omega_2{}^{M_2})=\tilde{f}^*(d\omega_2{}^{M_2})=-(\tilde{f}^*\psi^{M_2})\wedge(\tilde{f}^*\omega_1{}^{M_2})=-(\tilde{f}^*\psi^{M_2})\wedge\omega_1{}^{M_1}. \end{aligned}$$

したがって，接続形式 $\tilde{f}^*\psi^{M_2}$ は簡単にした構造方程式を満たす．一意性より

$$\tilde{f}^*\psi^{M_2}=\psi^{M_1}.$$

（3）　f は曲率を保存する．すなわち $f^*K^{M_2}=K^{M_1}$．なぜなら

$$d\psi^{M_i}=-(K^{M_i}\circ\pi_i)\omega_1{}^{M_i}\wedge\omega_2{}^{M_i}\qquad(i=1,\ 2)$$

であるから

$$\begin{aligned} -(K^{M_1}\circ\pi_1)\omega_1{}^{M_1}\wedge\omega_2{}^{M_1}=d\psi^{M_1}&=d(\tilde{f}^*\psi^{M_2})=\tilde{f}^*(d\psi^{M_2}) \\ &=\tilde{f}^*((-K^{M_2}\circ\pi_2)\omega_1{}^{M_2}\wedge\omega_2{}^{M_2}) \\ &=-(K^{M_2}\circ\pi_2\circ\tilde{f})(\tilde{f}^*\omega_1{}^{M_2})\wedge(\tilde{f}^*\omega_2{}^{M_2}) \\ &=-(K^{M_2}\circ f\circ\pi_1)\omega_1{}^{M_1}\wedge\omega_2{}^{M_1} \end{aligned}$$

となり

$$K^{M_1}\circ\pi_1=K^{M_2}\circ f\circ\pi_1,\qquad \text{すなわち}\qquad K^{M_1}=K^{M_2}\circ f=f^*K^{M_2}.$$

（4）　f は平行移動を保存する．すなわち，α: $[a,\ b]\rightarrow M_1$ に対して，$f\circ\alpha$ の $(f\circ\alpha(a),\ df(v))$ を通る水平もち上げ $\widetilde{f\circ\alpha}$ が，次式で与えられる．

$$\widetilde{f\circ\alpha}=\tilde{f}\circ\tilde{\alpha}.$$

ただし，$\tilde{\alpha}$ は $(\alpha(a),\ v)$ を通る α の水平もち上げである．なぜなら

$$\tilde{f}^*\psi^{M_2}=\psi^{M_1}\qquad\text{だから}\qquad d\tilde{f}(\mathcal{H}^{M_1})=\mathcal{H}^{M_2}.$$

（5）　α が測地線なのは $\dot{\alpha}$ が α に沿って平行なときであるから，f は測地線を測地線に写す．

M に対して，向きを保つ等長変換 h: $M\rightarrow M$ 全体は，写像の結合に関して群 $\mathcal{H}$ をなす．この群 $\mathcal{H}$ を M の**等長変換群**という．

定義 $\mathcal{H}$ が**推移的**であるとは，各 $m_1, m_2 \in M$ に対して，$h(m_1)=m_2$ となる $h \in \mathcal{H}$ が存在するときをいう．

> **定理 1** M を滑らかな，向きづけられた 2 次元リーマン多様体とする．M の等長変換群が推移的であるとする．このとき M は定曲率をもつ．

証明 $m_0 \in M$ として，任意の $m \in M$ に対して，$h(m_0)=m$ となる $h \in \mathcal{H}$ が存在する．したがって，$K(m_0)=(h^*K)(m_0)=K(h(m_0))=K(m)$． ▩

定義 $\mathcal{H}$ で M の等長変換群を表わす．$m_0 \in M$ に対して，m_0 を固定する $\mathcal{H}$ の部分群を $\mathcal{K}_{m_0}$ で表わす．すなわち

$$\mathcal{K}_{m_0}=[h \in \mathcal{H};\ h(m_0)=m_0].$$

$\mathcal{K}_{m_0}$ は M の m_0 における**イソトロピー群**とよぶ．

$k \in \mathcal{K}_{m_0}$ に対して，$dk\colon T(M, m_0) \to T(M, m_0)$ は向きを保つ等長変換である．すなわち，dk は $T(M, m_0)$ の回転である．したがって，各 $k \in \mathcal{K}_{m_0}$ に対して $g \in S^1$ が存在して，任意の $v \in T(M, m_0)$ に対して $dk(v)=gv$ が成り立つ．さらに，$d(k_1 \circ k_2)=dk_1 \circ dk_2$ であるから $k \to dk(m_0)$ で定義される写像 $\Phi\colon \mathcal{K}_{m_0} \to S^1$ は準同型写像である．

> **補題** M が連結なら，準同型写像 $\Phi\colon \mathcal{K}_{m_0} \to S^1$ は単射である．

証明 $G\colon D_\varepsilon \to M$ を m_0 の回りの測地座標系とする．$k \in \mathcal{K}_{m_0}$ は等長変換だから，$k\colon G(D_\varepsilon) \to G(D_\varepsilon)$ である．さらに，$G^{-1} \circ k \circ G$ は 0 を固定する D_ε の向きを保つ等長変換である．すなわち，ある回転 $g \in S^1$ に対して $G^{-1} \circ k \circ G=g$ となる．$dg(0)$ も g による回転だから

$$dk(m_0)=d(G \circ g \circ G^{-1})(m_0)=dG \circ g \circ dG^{-1}(m_0).$$

したがって

$$\begin{aligned} k \in \operatorname{kernel}\Phi &\Longleftrightarrow dk(m_0)=\text{恒等写像} \\ &\Longleftrightarrow g=\text{恒等写像} \\ &\Longleftrightarrow k|_{G(D_\varepsilon)}=G \circ g \circ G^{-1}=\text{恒等写像} \end{aligned}$$

となるから，集合

$$N=[m \in M;\ k(m)=m \text{ かつ } dk\colon T(M, m) \to T(M, m)=\text{恒等写像}]$$

は M の中の開集合．一方，k と dk は連続だから N は M の中で閉．M は連結だから $N=M$．すなわち，$k=$(M 上の恒等写像) となる．したがって

$$\mathrm{kernel}\,\Phi = \{\text{恒等写像}\}$$

となり，Φ は単射． ▓

定理 2 Mを連結，向きづけられた，2次元リーマン多様体とする．$\mathcal{H}^1$ が M の等長変換群 $\mathcal{H}$ の部分群で，次の条件を満たすならば，$\mathcal{H}=\mathcal{H}^1$.

（1） $\mathcal{H}^1$ は推移的，かつ

（2） ある $m_0 \in M$ に対して，準同型写像

$$\Phi:\ \mathcal{K}_{m_0}{}^1 \to S^1$$

が全射である．ただし $\mathcal{K}_{m_0}{}^1 = \mathcal{K}_{m_0} \cap \mathcal{H}^1$.

証明 $h \in \mathcal{H}$ とする．$\mathcal{H}^1$ の推移性より

$$h^1(h(m_0)) = m_0$$

となる $h^1 \in \mathcal{H}^1$ が存在する． このとき $h^1 h \in \mathcal{K}_{m_0}$. $\Phi|\mathcal{K}_{m_0}{}^1$ は全射だから，$k^1 \in \mathcal{K}_{m_0}{}^1$ が存在して

$$\Phi(k^1) = \Phi(h^1 h).$$

補題によって Φ が単射だから $k^1 = h^1 h$. すなわち $h = k^1 (h^1)^{-1} \in \mathcal{H}^1$. したがって $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^1$. すなわち $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1$. ▓

定義 各 $m \in M$ に対して，集合

$$[km = k(m)\ ;\ k \in \mathcal{K}_{m_0}]$$

を m を通る M の中の $\mathcal{K}_{m_0}$ の**軌道**とよぶ．

定理 3 Mを向きづけられた，2次元リーマン多様体とする．ある $m_0 \in M$ に対して，Φ: $\mathcal{K}_{m_0} \to S^1$ が全射であるとする．このとき，m_0 の測地座標近傍では，m_0 を通る測地線が，$\mathcal{K}_{m_0}$ の軌道に対する直交曲線(弧長によってパラメータをつけ直した)になっている(図 7.19 を見よ)．

証明 G: $D_\varepsilon \to M$ を m_0 の測地座標近傍とすると，$\mathcal{K}_{m_0}$ の軌道は D_ε の中

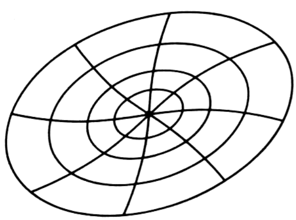


図 7.19

の原点を中心とする同心円のGによる像である(上の補題の証明を見よ)．ガウスの補題によって，これらの軌道は半径測地線に直交している．直交曲線の一意性より，これらの直交曲線は半径測地線である．▩

例 1　平面R^2に普通のリーマン構造を入れて考える．$\|\partial/\partial r_1\|=1$だから写像$c\colon R^2\to S(R^2)$が$c(m)=(m, e_1)=(m, (\partial/\partial r_1))$で与えられ，大域的に定義される．したがって，特別な接続$\mathscr{H}_1$は$S(R^2)$全体で定義される．さらに$e_1=\partial/\partial r_1$，$ie_1=\partial/\partial r_2$だから$\omega_1'=dr_1$かつ$\omega_2'=dr_2$．したがって

$$\omega_1=(\cos\theta)\tilde{\omega}_1+(\sin\theta)\tilde{\omega}_2=(\cos\theta)(\pi^*dr_1)+(\sin\theta)(\pi^*dr_2).$$

同様に

$$\omega_2=-(\sin\theta)(\pi^*dr_1)+(\cos\theta)(\pi^*dr_2).$$

$\varphi_1=d\theta$だから，第1構造方程式は

$$d\omega_1=-(\sin\theta)d\theta\wedge(\pi^*dr_1)+(\cos\theta)d\theta\wedge(\pi^*dr_2)=\varphi_1\wedge\omega_2$$

となる．同様に

$$d\omega_2=-\varphi_1\wedge\omega_1.$$

したがって，構造方程式は簡単化された形である．また，一意性より，$S(R^2)$上の特別な接続はリーマン接続である．さらに，特別な接続に対しては$d\varphi_1=0$であったから，R^2の曲率Kは恒等的に0である．

明らかに，R^2の任意の平行移動と回転は等長変換である．$\mathscr{H}^1$を平行移動と回転のつくる群とすると，$\mathscr{H}^1$は推移的であり(実際，平行移動のつくる群は推移的である)，$\Phi\colon \mathscr{K}_0{}^1\to S^1$は全射である($\mathscr{K}_0{}^1$は$R^2$での0を中心とした回転のつくる群である)から，定理2により，$\mathscr{H}^1$はR^2の等長変換全体の群である．

$m_0\in R^2$に対して，$\mathscr{K}_{m_0}$はm_0を中心としたR^2の回転のつくる群である．$\mathscr{K}_{m_0}$の軌道はm_0を中心とした円周だから，定理3によってm_0を通る測地線は直線である．

例 2　S^2をR^3の中の原点中心の半径rの球面とし，R^3から導かれるリーマン構造を入れておく．原点を中心としたR^3の回転のつくる群$\mathscr{H}$はS^2の等長変換の群である．定理2によって，これはS^2の等長変換全体の群である．$\mathscr{H}$はS^2上で推移的だから，定理1によって，S^2の曲率Kは一定である．ガウス-ボンネの定理より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^2}K\,\mathrm{vol}=\chi(S^2)=2.$$

すなわち

$$K\,\mathrm{vol}(S^2)=4\pi,\qquad K=\frac{4\pi}{\mathrm{vol}(S^2)}=\frac{4\pi}{4\pi r^2}=\frac{1}{r^2}.$$



図 7.20

S^2 の m を通る測地線は，m を固定する R^3 の回転の群の軌道に対する直交曲線である．この軌道は m を中心とする円周だから，m を通る測地線は m を通る大円である．

例 3　D を R^2 の中の半径 1 の開円板とする．D を複素平面の部分集合とみなして，D 上に次のようにしてリーマン構造(**ポアンカレの距離**，あるいは，双曲的距離とよばれる)を入れる．

$$\langle v_1, v_2\rangle=\frac{v_1\cdot v_2}{(1-p\bar{p})^2} \qquad (v_1, v_2\in T(D, p), p\in D)$$

ここで，$v_1\cdot v_2$ は $T(D, p)$ 上の通常の内積を表わし，$\bar{p}$ は p の複素共役を表わす．したがって，原点から p までのユークリッドの距離を r とすると，$p\bar{p}=r^2$ であるから

$$\left\|\frac{\partial}{\partial r_1}\bigg|_p\right\|=\left\|\frac{\partial}{\partial r_2}\bigg|_p\right\|=\frac{1}{1-p\bar{p}}$$

かつ，$\langle(\partial/\partial r_1), (\partial/\partial r_2)\rangle=0$．原点を通る D の中の半径線は無限の長さをもつ．なぜなら，ある θ に対して，α: $[0, 1]\to D$ を $\alpha(t)=te^{i\theta}$ とすると

$$l(\alpha)=\int_0^1\|\dot{\alpha}(t)\|dt=\int_0^1\frac{1}{1-t^2}dt=\infty.$$

次に

$$C=\left[f:\ D\to D;\ f(z)=e^{i\theta}\frac{z-p}{1-z\bar{p}},\ \text{ただし } p\in D,\ 0\leq\theta<2\pi\right]$$

とおくと，初等複素関数論より，C は D を D に写す変換群(共形群)である．実は，C は D の等長変換群である．これを示すために $f\in C$ とする．$T(D, z)$ と $T(D, f(z))$ をともに通常のように R^2 と同一視して考えると，共形写像は角を保存するから，ある実数 $\lambda(z)>0$ と，ある回転 $g(z)\in S^1$ に対して，$df(z)=\lambda(z)g(z)$ となる．拡大率 $\lambda(z)$ は $\lambda(z)=|(df/dz)(z)|$ で与えられる．ところが，初等的な計算によって

$$\left|\frac{df}{dz}(z)\right|(1-z\bar{z})=1-f(z)\overline{f(z)}$$

であることがわかる．ポアンカレの距離での z における単位ベクトルは，ユークリッドの距離では長さが $1-z\bar{z}$ であるから，$df(z)$ は(ポアンカレの距離で)単位ベクトルを単位ベクトルに写す回転である．すなわち，$df(z)$ は任意の z に対して等長写像だから，$f\colon D\to D$ は等長変換である．

したがって，C は D の等長変換群である．C は推移的である．なぜなら，$p\in D$ に対して

$$f_p\colon z\to\frac{(z-p)}{(1-z\bar{p})}$$

を考えると，f_p は p を原点に写すから，任意の2点 $p_1, p_2\in D$ に対して，${f_{p_2}}^{-1}\circ f_{p_1}$ は p_1 を p_2 に写す．さらに，C の原点でのイソトロピー部分群は

$$\mathcal{K}_0=[f\colon D\to D;\ f(z)=e^{i\theta}z]$$

で与えられる．すなわち，$\mathcal{K}_0$ は R^2 の回転群である．したがって，$\Phi\colon\mathcal{K}_0\to S^1$ は全射だから定理2によって C は D の等長変換全体の群である．特に，C は推移的だから，定理1によって，D の曲率 K は一定である．

原点でのイソトロピー部分群 $\mathcal{K}_0$ は回転群だから，その軌道は原点を中心とする円周である．定理3によって，原点を通る測地線は(適当にパラメータを入れた)半径直線である．等長変換は，測地線を測地線に写すことと，D の共形変換が半径直線を，半径直線かあるいは D の境界と直角に交わる円に写すことから，このような直線と円が測地線であることがわかる(図7.21を見よ)．特に，D の中の測地線による三角形の内角の和は π より小さいから，ガウス-ボンネの定理より，一定の値 K は負である(図7.22を見よ)．

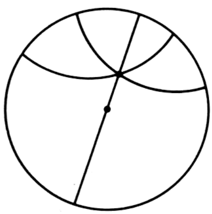


図 7.21

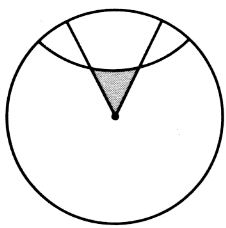


図 7.22

問題　一定の値 K を求めよ(ヒント：K は測地三角形の面積を求めて，ガウス-ボンネの定理を用いるか，ヤコビの方程式を使うかして求められる)．

注意　双曲的空間 D を R^2 の部分多様体として考えてきたが，包含写像は等長写像ではないことに注意せよ．実は，空間 D は R^3 の中にもリーマン部分多様体としては埋めこめないことが示される．

3つのリーマン多様体，R^2, S^2, D を考えたが，これらは，それぞれ曲率は一定で $K=0$, $K>0$, $K<0$ であった．同じ定曲率 K をもつ2つの単連結，完備な2次元リーマン多様体は等長であることがわかるから，本質的には，これらの3つの例で，定曲率，単連結，完備な2次元リーマン多様体が尽くされている．次の表に示すように，この3つの例は，数学のいくつかの分野にわたって重要な意味をもっている．

空間	リーマン幾何学	群論(等長変換群)	複素関数論	初等幾何学
R^2	$K=0$	R^2 でユークリッドの運動(回転＋平行移動)	複素平面	ユークリッド幾何学
S^2	$K>0$	R^3 での回転群	リーマン球面	球面幾何学(P^2 上では楕円的幾何学)
D	$K<0$	共形群	円板(双曲的平面あるいは上半平面)	双曲的幾何学

特に最後の列に示すように，この3つの例はまさに「初等」幾何学である．点 → 点，直線 → 測地線．長さ → 弧長，角 → 角，合同変換 → 等長変換のおきかえを行なうと，この3つの例はユークリッド幾何学の大部分の公理を満たす．最も重要な例外が，ユークリッドの第5公理，平行線の公理である．これは D 上では成り立たない．「直線」l と l 上にない点 p を与えると，p を通って l と交わらない「直線」が無数にある(図7.23を見よ)．

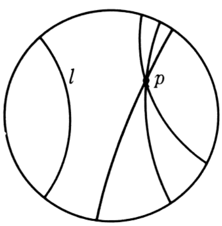


図 7.23

楕円的幾何学の場合は，モデルとして S^2 より P^2 を用いるのが普通であるから，任意の2「直線」は多くとも1点で交わる．この楕円的幾何学の場合には，直線はその直線以外の部分を2つに分けない．

複素関数論では，単連結な，1次元複素多様体は，R^2, S^2, D^2 だけに限られる．これが強い形のリーマン写像定理である．

8 章　R^3 に埋めこまれた多様体

前の章では，曲面自身に固有の幾何学的性質を研究した．ここでは，R^3 内に含まれている曲面の性質を調べよう．

(M, f) を R^3 の部分多様体とする．ただし M は向きづけられた 2 次元多様体とする．M には，f から誘導されたリーマン構造を与える．すなわち，$v_1, v_2 \in T(M, m)$ に対して $\langle v_1, v_2\rangle_m = \langle df(v_1), df(v_2)\rangle_{f(m)}$ とする．

定義　(M, f) に対して，M 上の**球面写像**[1] $s: M \to S^2$ を次のように定義する．まず $m \in M$ に対して単位ベクトル $s(m) \in T(R^3, f(m))$ を，$df(T(M, m))$ に垂直で，$T(M, m)$ と $T(R^3, f(m))$ の向きと両立するように選ぶ．すなわち $s(m)$ は，$T(R^3, f(m))$ の(一意的な)単位ベクトルで，v を $T(M, m)$ のある単位ベクトルとすると $\{df(v), df(iv), s(m)\}$ が $T(R^3, f(m))$ の向きづけられた正規直交基底となっている．次に $T(R^3, f(m))$ を自然に[2] R^3 と同一視して，$s(m)$ を S^2 の点とみなす．

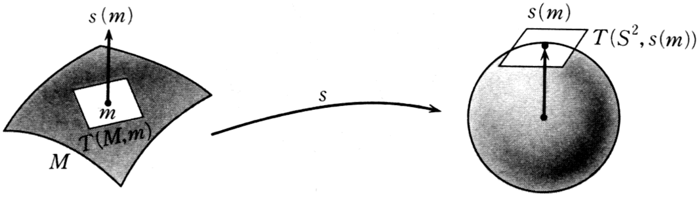


図 8.1

$T(M, m)$ と $df(T(M, m))$ を同一視すると都合がよいことがわかる．再び，R^3 にのる接空間と R^3 とを自然に同一視すると，$df(T(M, m))$ と $T(S^2,$

1) ［訳注］ ガウス写像ともいう．
2) ［訳注］ p. 115 の 4 参照．

$s(m))$ は R^3 の同じ部分空間である．したがって，$T(M, m)$ と $T(S^2, s(m))$ を同一視することにしよう．このとき，

$$ds(m) : T(M, m) \to T(S^2, s(m)) = T(M, m)$$

であることから，$ds(m)$ は $T(M, m)$ からそれ自身への線形変換となる．この章の主要な結果は，ガウスの定理（m における M の曲率 $K(m)$ は $ds(m)$ の行列式に等しい）である．実際，ガウスは最初（埋めこまれた多様体に対する）K をこの行列式と定義した．そして彼は，K が実は曲面固有のものであること，すなわち K は M 上のリーマン構造のみに依存し，特定な埋めこみ f には依存しないことを発見して驚いたのである．

まず，R^3 内の多様体が，局所座標においてどのような様子をしているかを球面写像の立場から見てみよう．

$f: M \to R^3$ に対して $f_j = r_j \circ f (j=1, 2, 3)$ とおくと，すべての $m \in M$ に対して

$$f(m) = (f_1(m), f_2(m), f_3(m)).$$

ここで r_j は R^3 の座標関数である．$\mu: U \to M$ を開集合 $U \subset R^2$ から M の開集合の上への滑らかな単射で，μ^{-1} も滑らかとする．しかも M の向きを与える M 上の 2-形式 τ に対して，$\mu^*\tau$ は $dr_1 \wedge dr_2$ のスカラー(>0)倍であるとする．すなわち，μ^{-1} は $\mu(U)$ 上の向きづけられた座標系である．$x_i = r_i \circ \mu^{-1}$ $(i=1, 2)$を $\mu(U)$ 上の座標関数とする．このとき $\partial/\partial x_i = d\mu(\partial/\partial r_i)$ で，

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = d(f \circ \mu)\left(\frac{\partial}{\partial r_i}\right) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(f_k \circ \mu)}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_k} \qquad (i=1, 2).$$

したがって，$T(M, m)$ の基底 $\{\partial/\partial x_i\}$ と $T(R^3, f(m))$ の基底 $\{\partial/\partial r_j\}$ に関する df の行列は

$$df \sim \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(f_1 \circ \mu)}{\partial r_1} & \dfrac{\partial(f_1 \circ \mu)}{\partial r_2} \\ \dfrac{\partial(f_2 \circ \mu)}{\partial r_1} & \dfrac{\partial(f_2 \circ \mu)}{\partial r_2} \\ \dfrac{\partial(f_3 \circ \mu)}{\partial r_1} & \dfrac{\partial(f_3 \circ \mu)}{\partial r_2} \end{pmatrix}$$

である．したがって $\mu(U)$ 上のリーマン構造は，

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(f_k \circ \mu)}{\partial r_i} \frac{\partial(f_k \circ \mu)}{\partial r_j} \qquad (i, j \in \{1, 2\})$$

により与えられる．$df(\partial/\partial x_1) \times df(\partial/\partial x_2)$——$R^3$ におけるベクトル積——が各点 $m \in U$ において $df(T(M, m))$ に垂直で，かつ $T(M, m)$ と $T(R^3, f(m))$ の

向きと両立していることから，$\mu(U)$ 上の球面写像は

$$s(m)=\frac{df(\partial/\partial x_1)\times df(\partial/\partial x_2)}{\|df(\partial/\partial x_1)\times df(\partial/\partial x_2)\|}$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial(f_1\circ\mu)}{\partial r_1},\ \frac{\partial(f_2\circ\mu)}{\partial r_1},\ \frac{\partial(f_3\circ\mu)}{\partial r_1}\right)\times\left(\frac{\partial(f_1\circ\mu)}{\partial r_2},\ \frac{\partial(f_2\circ\mu)}{\partial r_2},\ \frac{\partial(f_3\circ\mu)}{\partial r_2}\right)$$

である．ここで a はベクトル積 $df(\partial/\partial x_1)\times df(\partial/\partial x_2)$ の大きさを表わす．これより，特に s は滑らかな写像であることがわかる．

いま，点 $m_0\in M$ を固定しておく．必要ならば平行移動と回転により f をとり直して（こうしても，M 上に誘導されたリーマン構造は不変である），$f(m_0)=0$ で，しかも $df(T(M,\ m_0))$ は $(r_1,\ r_2)$-平面 R^2 に接し，また，R^2 の自然な向きとも一致している，すなわち $f^*(dr_1\wedge dr_2)$ は $T(M,\ m_0)$ の向きを与えると仮定してよい．p: $R^3\to R^2$ を，射影

$$p(u_1,\ u_2,\ u_3)=(u_1,\ u_2)$$

とする．そうすれば，$p\circ f$: $M\to R^2$，$p\circ f(m_0)=0$，しかも

$$d(p\circ f)(m_0)=dp\circ df(m_0)=df(m_0)$$

は $T(M,\ m_0)$ を $T(R^2,\ 0)$ の上に同型に写す．逆関数の定理より，R^2 の原点の近傍 U が存在し，U 上で $(p\circ f)^{-1}$ が定義され，滑らかとなる．$\mu=(p\circ f)^{-1}$: $U\to M$ とおく．このとき μ^{-1} は m_0 のまわりの局所座標系である．さらに，$p\circ f\circ\mu=i_U$ であることから

$$f\circ\mu(u_1,\ u_2)=(u_1,\ u_2,\ g(u_1,\ u_2))\qquad((u_1,\ u_2)\in U).$$

ただし $g=r_3\circ f\circ\mu$: $U\to R^1$．したがって，$x_1,\ x_2$ が $\mu(U)$ 上の座標関数ならば，この座標系に関する df の行列は

$$df\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \dfrac{\partial g}{\partial r_1} & \dfrac{\partial g}{\partial r_2}\end{pmatrix}$$

であり，$\mu(U)$ 上の球面写像は

$$s(\mu(u_1,\ u_2))=\frac{1}{a(u_1,\ u_2)}\left(1,\ 0,\ \frac{\partial g}{\partial r_1}(u_1,\ u_2)\right)\times\left(0,\ 1,\ \frac{\partial g}{\partial r_2}(u_1,\ u_2)\right)$$

$$=\frac{1}{a(u_1,\ u_2)}\left(-\frac{\partial g}{\partial r_1}(u_1,\ u_2),\ -\frac{\partial g}{\partial r_2}(u_1,\ u_2),\ 1\right)$$

により与えられる．すなわち，

$$s\circ\mu=\frac{1}{a}\left(-\frac{\partial g}{\partial r_1},\ -\frac{\partial g}{\partial r_2},\ 1\right)\qquad\left(\text{ただし } a=\sqrt{(\partial g/\partial r_1)^2+(\partial g/\partial r_2)^2+1}\right)$$

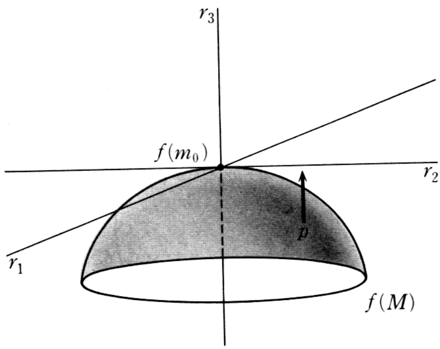


図 8.2

$m_0=\mu(0)$ において，$s(m_0)\perp df(T(M,\ m_0))=R^2$ であることより，$(\partial g/\partial r_1)(0)=(\partial g/\partial r_2)(0)=0$，$a(0)=1$ がいえる．

さて，$T(M,\ m_0)$ と $df(T(M,\ m_0))$ との同一視のもとで，$(\partial/\partial x_i)(m_0)$ と $(\partial/\partial r_i)(0)$ $(i=1,\ 2)$ とが同一視される．したがって，基底 $\{\partial/\partial x_i\}$ に関して，

$$ds:\ T(M,\ m_0)\rightarrow T(M,\ m_0)$$

に対する行列の成分 b_{ij} は

$$\begin{aligned} b_{ji}&=\left\langle ds\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right),\ \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle_{m_0}=\left\langle d(s\circ\mu)\left(\frac{\partial}{\partial r_i}\right),\ \frac{\partial}{\partial r_j}\right\rangle_0\\ &=dr_j\left(d(s\circ\mu)\left(\frac{\partial}{\partial r_i}\right)\right)\Bigg|_0=d(r_j\circ s\circ\mu)\left(\frac{\partial}{\partial r_i}\right)\Bigg|_0\\ &=\frac{\partial}{\partial r_i}(r_j\circ s\circ\mu)\Bigg|_0 \end{aligned}$$

により与えられる．かくして，

$$b_{11}=\frac{\partial}{\partial r_1}\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial g}{\partial r_1}\right)\Bigg|_0=\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial r_1}\frac{\partial g}{\partial r_1}\Bigg|_0-\frac{1}{a}\frac{\partial^2 g}{\partial {r_1}^2}\Bigg|_0=-\frac{\partial^2 g}{\partial {r_1}^2}\Bigg|_0.$$

同様に

$$b_{12}=-\frac{\partial^2 g}{\partial r_1\partial r_2}\Bigg|_0=b_{21},\qquad b_{22}=-\frac{\partial^2 g}{\partial {r_2}^2}\Bigg|_0$$

すなわち

$$ds(m_0)\sim\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial^2 g}{\partial r_1\partial r_1} & -\dfrac{\partial^2 g}{\partial r_2\partial r_1}\\ -\dfrac{\partial^2 g}{\partial r_1\partial r_2} & -\dfrac{\partial^2 g}{\partial r_2\partial r_2}\end{pmatrix}_0.$$

特に，K が ds の行列式であるというガウスの定理(まだ証明していないが)

を認めれば，曲率 $K(m_0)$ に対するいろいろな仮定のもとで，点 $f(m_0)$ の近傍での $f(M)$ の様子を定性的にとらえることができる．2変数関数の臨界点の定理により，次のことが知られている．関数 g が，臨界点0（原点）において極大になるのは，行列

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial {r_1}^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial r_1 \partial r_2} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial r_1 \partial r_2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial {r_2}^2} \end{pmatrix}_0$$

の固有値が2つとも負であるときであり，2つとも正ならば，g は原点において極小になる．したがって $K(m_0)>0$ ならば，$f(M)$ は原点の近くで R^2–平面より完全に上方にあるか，完全に下方にあるかのどちらかである．一方，$K(m_0)<0$ ならば，$ds(m_0)$ は1つの正の固有値と，1つの負の固有値をもち，したがって g は原点において鞍点をもつ．$K(m_0)=0$ ならば原点の近くでの $f(M)$ の様子は決定されない．

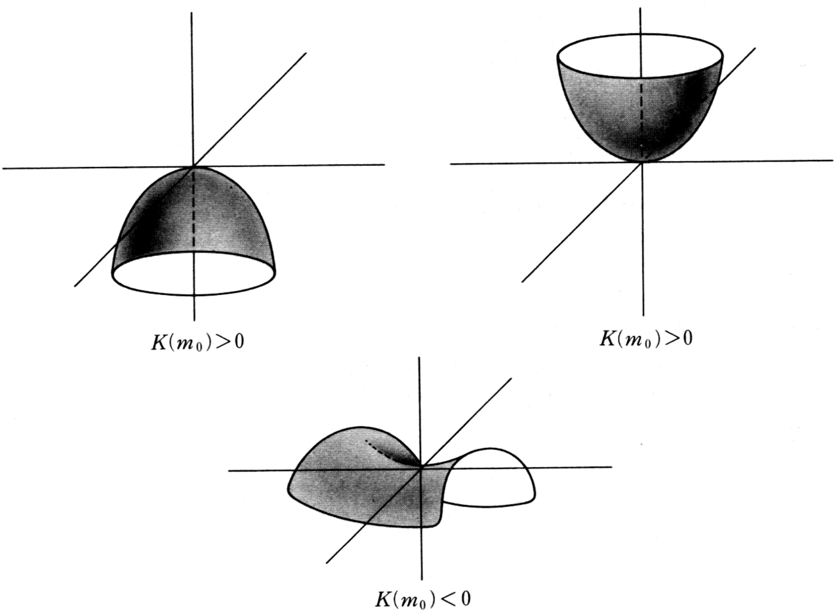


図 8.3

ガウスの定理を証明するためには，埋めこまれた多様体の局所的な幾何学的性質を具体的に記述する必要がある．

定理 1　(M, f) を R^3 の向きづけられた2次元多様体とする．e_1, e_2: $S(M) \to R^3$ を，

$$e_1(m, v) = df(v), \qquad e_2(m, v) = df(iv)$$

により定義する．ϕ を

$$\phi = \langle de_1, e_2 \rangle$$

により定義された $S(M)$ 上の1-形式とする．すなわち，$(m, v) \in S(M)$ と，$t \in T(S(M), (m, v))$ に対して，$de_1(t) \in T(R^3, e_1(m, v)) = R^3$,

$$\phi(t) = \langle de_1(t), e_2(m, v) \rangle.$$

このとき，ϕ は M 上のリーマン接続の1-形式である．

証明

不変性　$g = e^{i\theta} \in S^1$ に対して

$$g^*\phi = \phi \circ dg = \langle de_1 \circ dg, e_2 \circ g \rangle = \langle d(e_1 \circ g), e_2 \circ g \rangle.$$

ところが，$(m, v) \in S(M)$ に対しては

$$\begin{aligned} e_1 \circ g(m, v) &= e_1(m, \cos\theta v + \sin\theta(iv)) \\ &= \cos\theta df(v) + \sin\theta\, df(iv) \\ e_2 \circ g(m, v) &= e_2(m, \cos\theta v + \sin\theta(iv)) \\ &= -\sin\theta df(v) + \cos\theta df(iv). \end{aligned}$$

したがって

$$e_1 \circ g = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2, \qquad e_2 \circ g = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2.$$

かくして

$$d(e_1 \circ g) = \cos\theta\, de_1 + \sin\theta\, de_2.$$

さて，$\langle e_1, e_1 \rangle \equiv 1$，$\langle e_2, e_2 \rangle \equiv 1$，$\langle e_1, e_2 \rangle \equiv 0$ より，

$$\begin{aligned} 0 &= d\langle e_1, e_1 \rangle = 2\langle de_1, e_1 \rangle \\ 0 &= d\langle e_2, e_2 \rangle = 2\langle de_2, e_2 \rangle \\ 0 &= d\langle e_1, e_2 \rangle = \langle de_1, e_2 \rangle + \langle e_1, de_2 \rangle. \end{aligned}$$

したがって，$\langle de_1, e_1 \rangle = \langle de_2, e_2 \rangle = 0$，$\langle e_1, de_2 \rangle = -\langle de_1, e_2 \rangle$ であるから，

$$g^*\phi = \langle d(e_1 \circ g), e_2 \circ g \rangle = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\langle de_1, e_2 \rangle = \phi.$$

正規性　$(m, v) \in S(M)$ に対して $V(m, v) = \dot{\gamma}(0)$．ただし γ: $R \to S(M)$ は

$$\gamma(\theta) = (m, \cos\theta v + \sin\theta(iv))$$

により与えられる．これより，

$$\begin{aligned} \phi(V(m, v)) = \phi(\dot{\gamma}(0)) &= \langle de_1(\dot{\gamma}(0)), e_2(\gamma(0)) \rangle \\ &= \langle (e_1 \circ \dot{\gamma})(0), df(iv) \rangle. \end{aligned}$$

ところが

$$e_1\circ\gamma(\theta)=\cos\theta\, df(v)+\sin\theta\, df(iv)$$
$$(e_1\dot{\circ}\gamma)(0)=-\sin\theta\, df(v)+\cos\theta\, df(iv)|_0=df(iv).$$

したがって

$$\psi(V(m,v))=1.$$

以上のことから，ψ は M 上の接続形式であることがわかった．ψ がリーマン接続の形式であることを示すためには，簡単にした[1] 第1構造方程式が満たされることを確かめれば十分である．このためにまず，$(m,v)\in S(M)$，$t\in T(S(M),(m,v))$ とすると，

$$\omega_1(t)=\langle d\pi(t), v\rangle=\langle df\circ d\pi(t), df(v)\rangle=\langle d(f\circ\pi)(t), e_1(m,v)\rangle$$

であり，したがって

$$\omega_1=\langle d(f\circ\pi), e_1\rangle.$$

同様に

$$\omega_2=\langle d(f\circ\pi), e_2\rangle.$$

また，r_j-方向における $d(f\circ\pi)$ の成分は，関数の外微分である．すなわち，

$$\left\langle d(f\circ\pi), \frac{\partial}{\partial r_j}\right\rangle=dr_j\circ d(f\circ\pi)=d(r_j\circ f\circ\pi).$$

したがって $d(d(f\circ\pi))=0$．ただし，形式の3つの組の外微分は成分ごとに計算する．これより，

$$d\omega_i=d\langle d(f\circ\pi), e_i\rangle=\langle dd(f\circ\pi), e_i\rangle-\langle d(f\circ\pi), de_i\rangle$$

であることから，

$$(*)\qquad \boxed{d\omega_i=-\langle d(f\circ\pi), de_i\rangle.}$$

ところが

$$d(f\circ\pi)=\langle d(f\circ\pi), e_1\rangle e_1+\langle d(f\circ\pi), e_2\rangle e_2.$$

なぜならば，各 $(m,v)\in S(M)$ に対して $e_1(m,v)$ と $e_2(m,v)$ は $df(T(M,m))$ の正規直交基底をなすからである．したがって，

$$d(f\circ\pi)=\omega_1 e_1+\omega_2 e_2.$$

このことと(*)から，

$$d\omega_1=-\langle \omega_1 e_1+\omega_2 e_2, de_1\rangle=-\omega_2\wedge\langle e_2, de_1\rangle=-\omega_2\wedge\psi=\psi\wedge\omega_2$$
$$d\omega_2=-\langle \omega_1 e_1+\omega_2 e_2, de_2\rangle=-\omega_1\wedge\langle e_1, de_2\rangle=\omega_1\wedge\psi=-\psi\wedge\omega_1.\ ▮$$

埋めこまれた多様体に対する平行移動の解釈　α を M 内の曲線とし，$\tilde{\alpha}$ を $S(M)$ へのあるもち上げとする．このとき，$e_1\circ\tilde{\alpha}$ は R^3 内の曲線で，単位球面

1)［訳注］ p. 194 定理参照.

上にのっている．したがって，$d(e_1\circ\tilde{\alpha})(d/dt)_{t_0}=(d/dt)(e_1\circ\tilde{\alpha})_{t_0}$ は常に $e_1\circ\tilde{\alpha}(t_0)$ に垂直である．さて，$\tilde{\alpha}$ が水平的であるための必要十分条件は，$\psi(\tilde{\alpha})=0$ である．定理1より $\psi(\tilde{\alpha})=0$ であるための必要十分条件は，$d(e_1\circ\tilde{\alpha})(d/dt)_{t_0}$ が $e_2\circ\tilde{\alpha}(t_0)$ に垂直なことである．e_1 と e_2 が接空間を張っているから，$\tilde{\alpha}$ が水平的であるための必要十分条件は，すべての t_0 に対して，$(d/dt)(e_1\circ\tilde{\alpha})_{t_0}$ が $df(T(M, \alpha(t_0)))$ に垂直であることになる．

これらのことから，X が α に沿って定義された単位ベクトル場で，かつ，$\tilde{\alpha}(t)=(\alpha(t), X(\alpha(t)))$ ならば，「X が α に沿って平行 $\Leftrightarrow$ $\tilde{\alpha}$ が水平的 $\Leftrightarrow$ $(d/dt)(e_1\circ\tilde{\alpha})=(d/dt)(X\circ\alpha)$ は常に多様体に垂直」ということがいえる．すなわち，X が α に沿って平行であるための必要十分条件は，$X\circ\alpha$ が「多様体に沿って一定」(すなわち R^3 における $X\circ\alpha$ の微分の接ベクトル成分が恒等的に0) であることである．埋めこまれた多様体に対しては，接続という抽象的な概念を用いるかわりに，ここにおける平行移動に関する特徴づけが用いられる．

定理 2 (ガウスの定理) (M, f)を R^3 の向きづけられた2次元多様体とし，$s: M\to S^2$ を球面写像とする．このとき，各 $m\in M$ に対して，$\det ds(m)=K(m)$ である．

証明 $\tilde{s}: S(M)\to S(S^2)$ を

$$\tilde{s}(m, v)=(s(m), df(v))$$

により定義する．ω_1, ω_2, ψ を $S(M)$ 上の構造1-形式とし，またそれらに対応する $S(S^2)$ 上の形式を $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\psi}$ とする．このとき，

(I) $$\tilde{s}^*\bar{\psi}=\psi.$$

なぜならば，

$$\tilde{s}^*\bar{\psi}=\bar{\psi}\circ d\tilde{s}=\langle d\bar{e}_1\circ d\tilde{s}, \bar{e}_2\circ\tilde{s}\rangle=\langle d(\bar{e}_1\circ\tilde{s}), \bar{e}_2\circ\tilde{s}\rangle.$$

ところが

$$\bar{e}_1\circ\tilde{s}(m, v)=\bar{e}_1(s(m), df(v))=df(v)=e_1(m, v)$$
$$\bar{e}_2\circ\tilde{s}(m, v)=\bar{e}_2(s(m), df(v))=idf(v)=s(m)\times df(v)$$
$$=df(iv)=e_2(m, v)$$

したがって，$\bar{e}_i\circ\tilde{s}=e_i$ で，$\tilde{s}^*\bar{\psi}=\langle de_1, e_2\rangle=\psi.$

(II) $$\begin{cases}\tilde{s}^*\bar{\omega}_1=a_{11}\omega_1+a_{12}\omega_2\\ \tilde{s}^*\bar{\omega}_2=a_{21}\omega_1+a_{22}\omega_2\end{cases}$$

ただし，a_{ij} は $S(M)$ 上の滑らかな関数で，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{(m,v)}$$

が $T(M, m)$ の基底 $\{v, iv\}$ に関する $ds(m)$ の行列となっているものである．

これを示そう．$(m, v) \in S(M)$，$t \in T(S(M), (m, v))$ をとれば，

$$\begin{aligned}
(\tilde{s}^*\bar{\omega}_1)(t) &= \bar{\omega}_1 \circ d\tilde{s}(t) \\
&= \langle d\bar{\pi}(d\tilde{s}(t)),\ df(v)\rangle \qquad (\tilde{s}(m, v) = (s(m), df(v)) \text{ より}) \\
&= \langle d(\bar{\pi}\circ\tilde{s})(t),\ df(v)\rangle \\
&= \langle d(s\circ\pi)(t),\ df(v)\rangle \\
&= \langle ds(d\pi(t)),\ df(v)\rangle \\
&= \langle ds(\omega_1(t)v + \omega_2(t)(iv)),\ df(v)\rangle \\
&= \langle ds(v),\ v\rangle\omega_1(t) + \langle ds(iv),\ v\rangle\omega_2(t) \qquad (df(v) \text{ は } v \text{ と同一視されるから}).
\end{aligned}$$

同様に，

$$(\tilde{s}^*\bar{\omega}_2)(t) = \langle ds(v),\ iv\rangle\omega_1(t) + \langle ds(iv),\ iv\rangle\omega_2(t).$$

以上で(II)が証明された．

(III)　各 $m \in M$ に対して $\det ds(m) = K(m)$．なぜならば

$$\begin{aligned}
-K\omega_1\wedge\omega_2 = d\psi = d(\tilde{s}^*\bar{\psi}) &= \tilde{s}^*(d\bar{\psi}) \\
&= \tilde{s}^*(-\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2) \qquad (S^2 \text{ が定曲率 } 1 \text{ をもつことから}) \\
&= -\tilde{s}^*\bar{\omega}_1\wedge\tilde{s}^*\bar{\omega}_2 \\
&= -(a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2)\wedge(a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2) \\
&= -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\omega_1\wedge\omega_2.
\end{aligned}$$

したがって，

$$K = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det ds(m). \quad ▮$$

注意　線形変換 $ds(m)$ は，m における M の**第 2 基本形式**といわれる．$ds(m)$ は自己随伴な線形変換である．なぜなら，上で議論した特別な座標に関する行列は，対称行列

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 g}{\partial r_1{}^2} & -\dfrac{\partial^2 g}{\partial r_2 \partial r_1} \\ -\dfrac{\partial^2 g}{\partial r_1 \partial r_2} & -\dfrac{\partial^2 g}{\partial r_2{}^2} \end{pmatrix}$$

であるからである．

定理 3　(M, f) を R^3 の向きづけられたコンパクト 2 次元多様体とする．このとき，$K(m_0) > 0$ なる $m_0 \in M$ が存在する．

証明　直観的に，まず M を内側に含む任意の球面を考える．次に，この球面を縮めてゆき，最初に M に触れた点を $m_0 \in M$ とする．このとき m_0 における M の曲率はこの球面の曲率よりも大である．

厳密には，M 上の関数 $r^2 \circ f$ を考える．ただし，r は R^3 の原点からの距離とする．$r^2 \circ f$ が最大値をもつ点を $m_0 \in M$ とする．必要ならば，R^3 の原点を中心に回転させることにより，$f(m_0)$ は r_3 軸上にあると仮定してよい．すなわちある c に対して $f(m_0)=(0, 0, c)$．そうすれば，$r_3 \circ f$ もまた m_0 において最大値をもつ．なぜならばすべての $m \in M$ に対して $r_3 \circ f(m_0)=r \circ f(m_0) \geq r \circ f(m) \geq r_3 \circ f(m)$ であるからである．したがって，$v \in T(M, m_0)$ に対して

$$\left\langle df(v), \frac{\partial}{\partial r_3} \right\rangle = dr_3(df(v)) = d(r_3 \circ f)(v) = 0.$$

すなわち，$df(T(M, m_0))$ は r_3 軸に垂直である．$df(T(M, m_0))$ の向きは r_1，r_2 平面上の向きと一致していると仮定してよい(そうでなければ，r_1 軸を軸にして角度 π だけ回転させればよい)．さらに，必要ならば r_3 軸を軸として回転させることにより，$\partial/\partial r_1$ と $\partial/\partial r_2$ が $ds(m_0)$ の固有ベクトルであると仮定できる．このとき，$f(m_0)=(0, 0, c)$ であることから，この座標は $f(M)$ を $(0, 0, -c)$ だけ平行移動した場合にも使うことができる．すなわち，μ: $U \to M$，$U \subset R^2$ が存在して，$g(0, 0)=0$，かつ

$$\left.\frac{\partial g}{\partial r_1}\right|_0 = \left.\frac{\partial g}{\partial r_2}\right|_0 = 0$$

を満たすある g: $U \to R$ がとれて

$$f \circ \mu(u_1, u_2) = (u_1, u_2, c+g(u_1, u_2))$$

であるようにできる．このとき，$\partial/\partial r_1$ と $\partial/\partial r_2$ は $ds(m_0)$ の固有ベクトルであることより，$ds(m_0)$ の行列は

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 g}{\partial {r_1}^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial^2 g}{\partial {r_2}^2} \end{pmatrix}_0 .$$

ところが，$r^2 \circ f \circ \mu$ は $(0, 0)$ において最大値をもつ．したがって，このことと，

$$r^2 \circ f \circ \mu(u_1, u_2) = {u_1}^2 + {u_2}^2 + [c+g(u_1, u_2)]^2$$

であることより，$j=1, 2$ に対して

$$0 \geq \left.\frac{\partial^2}{\partial {r_j}^2}(r^2 \circ f \circ \mu)\right|_0 = \left[2+2\left(\frac{\partial g}{\partial r_j}\right)^2 + 2(c+g)\frac{\partial^2 g}{\partial {r_j}^2}\right]_0 = 2+2c\left.\frac{\partial^2 g}{\partial {r_j}^2}\right|_0 .$$

したがって

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial {r_1}^2}\right|_0 \leq -\frac{1}{c} \qquad \text{および} \qquad \left.\frac{\partial^2 g}{\partial {r_2}^2}\right|_0 \leq -\frac{1}{c}$$

であるから，

$$K(m_0)=\det ds(m_0)=\left.\frac{\partial^2 g}{\partial {r_1}^2}\frac{\partial^2 g}{\partial {r_2}^2}\right|_0 \geq \frac{1}{c^2}>0. \quad ▨$$

系　積としてのリーマン構造をもつトーラス $S^1\times S^1$ を，R^3 の部分多様体として埋めこむことはできない．

証明　被覆写像 $R^2\to S^1\times S^1$ が，局所等長写像であるから，$S^1\times S^1$ の曲率は恒等的に 0 である．

定理 4　(M, f) を R^3 の向きづけられた，連結なコンパクト 2 次元多様体とする．M の曲率 K が決して 0 にはならないとする．このとき，至るところで $K>0$ である．さらに，M が単連結[1]であるならば，球面写像 s: $M\to S^2$ は全単射で，滑らかな逆写像をもつ(すなわち，M は S^2 と多様体として同型である)．

証明　最初の事実は前の定理よりいえる．後半を証明しよう．

$\pi\circ s$: $M\to P^2$ (ここで P^2 は射影平面，π: $S^2\to P^2$ は射影) を考える．$\pi\circ s$ が被覆写像であることを示す．まず，$\det ds=K>0$ より ds は至るところで正則である．したがって $d\pi\circ ds=d(\pi\circ s)$ も至るところで正則である．逆関数の定理により，$\pi\circ s$ は局所的に 1 対 1 で，しかも開写像である．次に $\pi\circ s$ は全射であることを示そう．$p\in P^2$ (すなわち $p=\pi(\tilde{p})$, $\tilde{p}\in S^2$) に対して，$\tilde{p}$ に垂直な R^3 内の平面をとる．この平面を $\tilde{p}$ の方向に十分遠くまで動かし，その後，逆に戻して最初に M に触れた点を m_0 とすると，$s(m_0)=\pm\tilde{p}$ であり，$\pi\circ s(m_0)=p$. 厳密にいえば，$m_0\in M$ を関数 $m\to\langle f(m), \tilde{p}\rangle$ が最大値をとる点とする．このとき $\tilde{p}\perp df(T(M, m_0))$. なぜならば $v\in T(M, m_0)$ に対して

$$\langle df(v), \tilde{p}\rangle=d(\langle f, \tilde{p}\rangle)(v)=0.$$

したがって，$s(m_0)=\pm\tilde{p}$, $\pi\circ s(m_0)=p$. 最後に，M がコンパクトであることより，各 $p\in P^2$ に対して $(\pi\circ s)^{-1}(p)$ は有限集合 ($(\pi\circ s)^{-1}(p)$ は M で閉であるからコンパクトである．一方，$\pi\circ s$ が局所的に 1 対 1 であるから，$(\pi\circ s)^{-1}(p)$ の各点は相対位相のもとで開である)．したがって，p のまわりの十分小なる開集合 U に対して，$(\pi\circ s)^{-1}(U)$ は交わりのない開集合の和集合であり，各開

1)［訳注］　実は単連結の仮定は必要ない．

集合は，$\pi\circ s$ によって U の上に同相に写される．以上のことから $\pi\circ s$ は被覆写像であり，M は P^2 の被覆空間である．ところが，P^2 の被覆空間は S^2 と P^2 自身しかない．P^2 は向きづけ可能ではないから，M は S^2 に同相でなければならない．しかも s は滑らかな逆写像をもつ滑らかな同相写像である．▨

定理 5　(M_1, f_1) と (M_2, f_2) を R^3 の向きづけられた2次元多様体とする．M_1 と M_2 が R^3 内の曲線 α に沿って接していると仮定する．すなわち，曲線 α_i: $[a, b]\to M_i$ $(i=1, 2)$が存在して

$$f_1\circ\alpha_1=f_2\circ\alpha_2=\alpha,$$

かつ，すべての $t\in[a, b]$ に対して

$$df_1(T(M_1, \alpha_1(t)))=df_2(T(M_2, \alpha_2(t)))$$

であるようにできると仮定する．このとき，α に沿った平行移動は両方の多様体において等しい．すなわち，$df_1(v_1)=df_2(v_2)$ なる $v_1\in T(M_1, \alpha_1(a))$，$v_2\in T(M_2, \alpha_2(a))$ をとると，次のようになる．

$$df_1(\alpha_1 \text{ に沿った } v_1 \text{ の平行移動})=df_2(\alpha_2 \text{ に沿った } v_2 \text{ の平行移動}).$$

証明　s_i: $M_i\to S^2$ $(i=1, 2)$を球面写像とし，$\tilde{s}_i$: $S(M_i)\to S(S^2)$ を対応する円周束上の写像とする．すべての $t\in[a, b]$ に対して

$$df_1(T(M_1, \alpha_1(t)))=df_2(T(M_2, \alpha_2(t)))$$

であるから，$s_1\circ\alpha=\pm s_2\circ\alpha$．ここで $s_1\circ\alpha=+s_2\circ\alpha$ と仮定してもよい．そうでないときは，M_2 上の向きを逆にすればよい(M_2 上の向きをかえることは $S(M_2)$ 上の接続形式の符号をかえるだけで，平行性には影響しない)．

定理2の証明より，

$$\tilde{s}_i{}^*\bar{\varphi}=\varphi_i.$$

ただし φ_i は $S(M_i)$ 上の接続形式である．$\tilde{\alpha}_i$: $[a, b]\to S(M_i)$ を，$(\alpha_i(a), v_i)$ を通る α_i の水平もち上げとする．このとき，

$$\bar{\varphi}\left(d(\tilde{s}_i\circ\tilde{\alpha}_i)\left(\frac{d}{dt}\right)\right)=\bar{\varphi}\left(d\tilde{s}_i\left(d\tilde{\alpha}_i\left(\frac{d}{dt}\right)\right)\right)=(\tilde{s}_i{}^*\bar{\varphi})\left(d\tilde{\alpha}_i\left(\frac{d}{dt}\right)\right)$$

$$=\varphi_i\left(d\tilde{\alpha}_i\left(\frac{d}{dt}\right)\right)=0 \qquad (\tilde{\alpha}_i \text{ が水平的であるから}).$$

したがって，$\tilde{s}_i\circ\tilde{\alpha}_i$: $[a, b]\to S(S^2)$ $(i=1, 2)$は，点

$$\tilde{s}_1\circ\tilde{\alpha}_1(a)=(s_1(\alpha_1(a)), df_1(v_1))$$
$$=(s_2(\alpha_2(a)), df_2(v_2))=\tilde{s}_2\circ\tilde{\alpha}_2(a)$$

を通る $s_1\circ\alpha_1=s_2\circ\alpha_2$ の水平もち上げである．特に $\tilde{s}_1\circ\tilde{\alpha}_1=\tilde{s}_2\circ\tilde{\alpha}_2$．したがって，

v_i を α_i に沿って $\alpha_i(t)$ まで平行移動したものを $v_i(t)$ とすれば，$\tilde{\alpha}_i(t)=(\alpha_i(t), v_i(t))$ $(i=1, 2)$．また，

$$(s_1(\alpha_1(t)), df_1(v_1(t)))=\tilde{s}_1(\tilde{\alpha}_1(t))=\tilde{s}_1\circ\tilde{\alpha}_1(t)=\tilde{s}_2\circ\tilde{\alpha}_2(t)$$
$$=(s_2(\alpha_2(t)), df_2(v_2(t))).$$

すなわち

$$df_1(v_1(t))=df_2(v_2(t)). \quad ▨$$

定理5によって R^3 の部分多様体での平行移動の仕方を，幾何学的に見ることができる．α: $[a, b]\to M$ を曲線とし，R^3 の曲線 $f\circ\alpha$ に沿った $f(M)$ の接平面の族を考える．$t_0, t\in[a, b]$ に対して，$f\circ\alpha(t_0)$ における接平面と $f\circ\alpha(t)$ における接平面との共通部分は一般に直線である．$t\to t_0$ のときのこの直線の極限は，平面 $df(T(M, \alpha(t_0))$ の中の $f\circ\alpha(t_0)$ を通る直線となる．すべての $t_0\in[a, b]$ に対して，このようにしてつくったすべての直線の集まりは，可展面とよばれる曲面 D となる．曲面 D は，平坦$(K=0)$であり，$f\circ\alpha$ に沿って $f(M)$ に接していることがわかる．したがって，M における α に沿った平行移動は，D における $f\circ\alpha$ に沿った平行移動と同じである．ところで，D は平坦であるから，平面の一部と局所的に等長である．すなわち，α の近傍において，D は平面上に広げることができ，ここでの平行移動は普通の平行移動である．特に，R^3 の球面における円周に沿った平行移動は，その円周で球面に接する錐面における同じ円周に沿った平行移動と同一のものである．ところが，錐面は，平面上に広げることができ，そこでの平行移動は普通の平行移動である．したがって，逆に広げた錐面を球面のまわりに戻せば，球面上の平行移動が得られる．

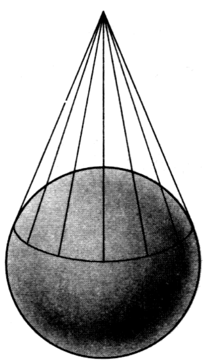


図 8.4

定理 6 M を向きづけ可能な2次元多様体とし，$f, g\colon M \to R^3$ を等長な埋めこみとする．(M, f) と (M, g) の第2基本形式が等しいとすれば，R^3 の剛性運動(等長写像) Φ が存在し，$f=\Phi\circ g$ とできる．

証明の概要 点 $(m_0, v_0)\in S(M)$ をとり，$g(m_0)$ を $f(m_0)$ に，$dg(v_0)$ を $df(v_0)$ に，しかも $dg(T(M, m_0))$ を $df(T(M, m_0))$ の上に写す向きを保って剛性運動 Φ を選ぶ．$f_1=f, f_2=\Phi\circ g$ とおけば，$f_1(m_0)=f_2(m_0)$，$df_1(v_0)=df_2(v_0)$,

$$df_1(T(M, m_0))=df_2(T(M, m_0)).$$

したがって，$\tilde{s}_1(m_0, v_0)=\tilde{s}_2(m_0, v_0)$． さらに，$\Phi$ は等長写像だから，(M, f_1) と (M, f_2) の第2基本形式は等しい．

定理2の証明における式(I), (II)の結果として次のことがいえる． すなわち，(M, f_i) $(i=1, 2)$に対する第2基本形式が等しいということから，

$$\tilde{s}_i\colon S(M)\to S(S^2)$$

が，$\tilde{s}_1^*(\bar{\psi})=\tilde{s}_2^*(\bar{\psi})$，$\tilde{s}_1^*(\bar{\omega}_i)=\tilde{s}_2^*(\bar{\omega}_i)$ $(i=1, 2)$を満たすことが導ける．

また，$S(S^2)$ を，行列式が1である 3×3 直交行列全体からなる空間と同一視することができる． 実際，$S(S^2)$ は，対 (u, v) (ただし u は R^3 の単位ベクトル，v は u に垂直な単位ベクトル) からなっているから，(u, v) に対応する行列として $u, v, u\times v$ を列とするものをとればよい．

さらに，次の補題(および系)が必要である．

補題 2つの曲線 $\alpha_1, \alpha_2\colon [0, 1]\to S(S^2)$ が，$\alpha_1^*(\bar{\psi})=\alpha_2^*(\bar{\psi})$，$\alpha_1^*(\bar{\omega}_i)=\alpha_2^*(\bar{\omega}_i)$ $(i=1, 2)$ を満たすとする．β を曲線 $\beta(t)=\alpha_2(t)^{-1}\cdot\alpha_1(t)$ (ただし，$^{-1}$ は逆行列，$\cdot$ は行列の積とする)とすれば，$\beta^*(\bar{\psi})=\beta^*(\bar{\omega}_i)=0$.

証明 この補題の証明は読者に任せる．$d\beta$ を $d\alpha_1$ と $d\alpha_2$ によって計算するとよい．

補題の系 さらに $\alpha_1(0)=\alpha_2(0)$ ならば，$\alpha_1=\alpha_2$.

証明 $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\psi}$ が $S(S^2)$ の各点において余接空間を張るから，補題より，$d\beta$ は恒等的に0である．したがって β は定値写像である．$\alpha_1(0)=\alpha_2(0)$ より $\beta(0)$ は単位行列であるから，すべての $t\in[0, 1]$ に対して $\beta(t)$ も単位行列である．これより，すべての $t\in[0, 1]$ に対して $\alpha_1(t)=\alpha_2(t)$ である．以上で系は証明された．

さて，ここで，$f_1=f_2$ を示せば証明が終る．そのために，まず γ を，出発点を(m_0, v_0)とする $S(M)$ の曲線とし，$\alpha_i=\tilde{s}_i\circ\gamma$ とおく．このとき，α_i は補題の仮定を満たし，しかも $\alpha_1(0)=\alpha_2(0)$ である．したがって，系より $\alpha_1=\alpha_2$. 特に，$\tilde{s}_1(\gamma(t))=\tilde{s}_2(\gamma(t))$ $(t\in[0, 1])$ である．(m_0, v_0) を出発点とする滑らかな曲線により，$S(M)$ の任意の点に到達することができるから，$\tilde{s}_1=\tilde{s}_2$. すなわち，あらゆる $(m, v)\in S(M)$ に対して，$s_1(m)=s_2(m)$ かつ $df_1(v)=df_2(v)$.

次に写像 f_1-f_2: $M\to R^3$ を考える．ただし $(f_1-f_2)(m)=f_1(m)-f_2(m)$. 任意の単位ベクトル v に対して，$df_1(v)=df_2(v)$ であるから，$d(f_1-f_2)=0$. すなわち $f_1=f_2+$定値 である．ところが $f_1(m_0)=f_2(m_0)$ だから，$f_1=f_2$. ∎

参 考 文 献

トポロジー

1. Alexandroff, P. and Hopf, H.: *Topologie*, Springer-Verlag, 1935.
2. Bourbaki, N.: *Topologie Générale*, Hermann, 1953.
   森毅他訳「ブルバキ数学原論」, 位相 1～5, 東京図書.
3. Eilenberg, S. and Steenrod, N. E.: *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton U. P., 1952.
4. Hocking, J. G. and Young, G. S.: *Topology*, Addison-Wesley, 1961.
5. Hu, S. T.: *Elements of General Topology*, Holden-Day, 1964.
6. Kelley, J. L.: *General Topology*, Van Nostrand, 1955.
   児玉之宏訳「位相空間論」吉岡書店.
7. Lefschetz, S.: *Introduction to Topology*, Princeton U. P., 1949.
8. Pontryagin, L. S.: *Foundations of Combinatorial Topology*, Graylock, 1952.
9. Seifert, H. and Threlfall, W.: *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, 1934.
10. Sierpinski, W.: *Introduction to General Topology*, University of Toronto Press, 1934.
11. Spanier, E. H.: *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.
12. Wallace, A. H.: *Introduction to Algebraic Topology*, Pergamon, 1957.
    河野伊三郎訳「位相数学入門」共立出版.

幾 何 学

1. Auslander, L. and Mackenzie, R. E.: *Introduction to Differentiable Manifolds*, McGraw-Hill, 1963.
2. Bishop, R. L. and Crittenden, R. J.: *Geometry of Manifolds*, Academic, 1964.
3. De Rham, G.: *Variétés Differentiables*, Hermann, 1960.
   高橋恒郎訳「微分多様体」東京図書.
4. Flanders, H.: *Differential Forms, with Applications to the Physical Sciences*, Academic, 1963.
   岩堀長慶訳「微分形式の理論およびその物理科学への応用」岩波書店.
5. Guggenheimer, H. W.: *Differential Geometry*, McGraw-Hill, 1963.
6. Hicks, N. J.: *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand, 1965.
7. Kobayashi, S. and Nomizu, K.: *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Interscience (Wiley), 1963.
8. Laugwitz, D.: *Differential and Riemannian Geometry*, Academic, 1965.

9. O'Neill, B.: *Elementary Differential Geometry*, Academic, 1966.
10. Sternberg, S.: *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, 1964.
高橋恒郎訳「微分幾何学」吉岡書店.
11. Whitney, H.: *Geometric Integration Theory*, Princeton U. P., 1957.

追加参考文献(訳者)

1. 松島与三著「多様体入門」裳華房.
2. 村上信吾著「多様体」共立出版.
3. 田村一郎著「トポロジー」岩波書店.
4. 小松, 中岡, 菅原著「位相幾何学 I」岩波書店.
5. ミルナー著(志賀浩二訳)「モース理論」吉岡書店.
6. ウォレス著(一楽重雄訳)「微分位相幾何学入門」東京図書.
7. 服部晶夫著「多様体」岩波書店.
8. 長野正著「曲面の数学」培風館.
9. 丹野修吉著「多様体の微分幾何学」実教出版.
10. クリンゲンバーグ著(小畠守生訳)「微分幾何学」海外出版貿易.
11. 河田敬義編「位相幾何学」(現代数学演習叢書 2)岩波書店.

訳者あとがき

本書については，訳者が数回学部のゼミでテキストとして用いたことがあり，以前からなかなか良い本だと感じていたのであるが，訳し終った今，ますますその感を深くしている．

どんな点が良いかといえば，原著者のはしがきにあるように，数学のある1つの理論を理論として展開するのではなく，「数学」というものを十分味わえるように意図されている点である．たとえていえば，本書は数学という世界の中での1つの道であり，トポロジーの中の基本群という点から始まり，幾何学の中の曲面論という点で終るものといえるであろう．もちろん，数学全体の中ではごく小さい範囲しか歩いていないのであるが，それでも，トポロジーから幾何学へまたがる内容豊かなものであり，普通，学部の段階では2つの分野にまたがる講義などがないことを思えば，一見地味に見える本書が，実は大きな意味をもった1つの実験であることがわかると思う．

本書には，もう1つ大きな特徴がある．それは，豊かな内容をもつにもかかわらず，入門書としての性格を失っていない点である．具体的には，本書の記述の仕方が最初はていねいで詳しいのであるが，章を追うにつれ，だんだんに省略され重要な点だけが示されるようになるのである．したがって，読者は，最初のうちは行間の意味をとる必要はほとんどなく，書いてある通りに追っていけば良いのである．後半では細かい点を適切に補いながら読み進む必要があるが，前半をきちんと読んでおけば，そう苦労せずに読めるはずである．

なお，位相空間論をすでに学習している読者は，直接，第3章から読み始めることもできるが，訳者としては今述べたような意味から，やはり第1章から読まれることを勧める．本書は，学部の3, 4年生のテキストとして書かれているが，2年生あるいは，1年生でも少しゆっくり読めば十分に読みこなせる．むしろ，1年，2年のうちから，1年半あるいは2年くらいの計画で読むのがよいのではないかと思う．

最後に，出版にあたりいろいろとお世話になった培風館の牧野末喜氏，また，原稿作成から校正まで多大の御協力を頂いた松江由美子氏に，心からの感謝の意を表したい．

1976年　盛夏

訳　　者

索　引

監訳者・訳者略歴

赤 攝 也
せき せつ や

1949年 東京大学理学部数学科卒
1962年 立教大学教授
1964年 東京教育大学教授
1969年 立教大学教授
1984年 放送大学教授

主要著書

数学序説(共著, 培風館)
基礎論(新初等数学講座, ダイヤモンド社)
公理(共著, 新初等数学講座, ダイヤモンド社)
変分学(現代数学講座, 共立出版)
集合論入門(培風館)
確率論入門(培風館)
トポロジー入門(訳, 共立出版)
電子計算機入門(共著, 培風館)
計算の理論(共訳, 岩波書店)
数学の哲学(訳, 培風館)
ブール代数(訳, 培風館)
現代数学概論(筑摩書房)
数学基礎論入門(訳, 培風館)

松 江 広 文
まつ え ひろ ふみ

1967年 立教大学理学部数学科卒
1972年 東京大学大学院理学系研究科博士課程修了
現 在 成城大学経済学部教授

一 楽 重 雄
いち らく しげ お

1968年 東京大学理学部数学科卒
1970年 東京大学大学院理学系研究科修士課程修了
現 在 横浜市立大学国際総合科学部教授

主要著書

微分位相幾何学入門(訳, 東京図書)
新しいトポロジー(共著, 講談社)
位相幾何学(朝倉書店)

1976 年 11 月 30 日 初 版 発 行
2006 年 9 月 8 日 初版第21刷発行

トポロジーと幾何学入門

原著者 I. M. シンガー
J. A. ソ ー プ
監訳者 赤 攝 也
訳 者 松 江 広 文
一 楽 重 雄
発行者 山 本 格
発行所 株式会社 培 風 館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102-8260
電 話(03)3262-5256(代表)・振 替 00140-7-44725

中央印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-00150-3 C3041